Colegiul Național “Mircea cel Bătrân” Constanța

Concursul Național de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediția a XIV-a, 24 aprilie 2013

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Se consideră numerele reale strict pozitive a, b, c, d cu $ab+bc+cd+da \le 8$. Să se arate că:

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4}+\frac{b^2+c^2}{(b+c)^4}+\frac{c^2+d^2}{(c+d)^4}+\frac{d^2+a^2}{(d+a)^4}\le\frac{1}{abcd}$$

Gazeta matematică

Subiectul 2

Să se determine funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică relația

$$f\left(x^2+y\right)-f\left(f\left(x\right)-y\right)=4f\left(x\right)\cdot y,\ \forall x,\ y\in\mathbf{R}.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Subiectul 3

În triunghiul *ABC*, notăm ortocentrul cu *H*, centrul de greutate cu *G* și centrul cercului circumscris cu *O*. Se consideră *M*, *N* și *P* simetricele ortocentrului *H* față de *A*, *B* respectiv *C*.

- **a)** Arătați că dacă G_1 este centrul de greutate al triunghiului *MNP*, atunci *O* este mijlocul segmentului $[GG_1]$.
- **b)** Arătați că centrul cercului circumscris triunghiului *MNP* este simetricul lui *H* față de *O*.
- **c)** Dacă O_1, O_2 și O_3 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor *HBC*, *HAC* respectiv *HAB*, arătați că centrul de greutate al triunghiului $O_1O_2O_3$ este mijlocul segmentului $[HG]$.

Cătălin Zîrnă, Constanța

Subiectul 4

Fie numărul natural $n>6$. Arătaţi că pentru orice poligon convex cu *n* vârfuri $A_1A_2\cdots A_n$, există $i\ne j$, astfel încât $\left|\cos\widehat{A_i}-\cos\widehat{A_j}\right|<\dfrac{1}{2(n-6)}$.

***

Notă. Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.