MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudețean de Matematică al Şcolii gimnaziale nr. 56
Ediția a XII - a, 26.01.2013

Soluții şi bareme clasa a VI – a

1.	Avem $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, $\overline{ab} = 10a + b$	**1p**
	Din $a+b \mid 10a+b$, deducem $a+b \mid 9a$	**1p**
	Dacă $d = (a;b)$, atunci $a = da_1$ şi $b = db_1$, unde $(a_1;b_1) = 1$. Rezultă că $a_1 + b_1 \mid 9a_1$	**2p**
	Cum $(a_1 + b_1; a_1) = 1$, rezultă că $a_1 + b_1 \mid 9$. Dar $a_1 + b_1 \neq 1$, deci $a_1 + b_1 \in \{3;9\}$.	**2p**
	Deoarece $a + b = d(a_1 + b_1)$, rezultă că $3 \mid a+b$, deci $3 \mid \overline{ab}$.	**1p**
2.	**a)** Suma numerelor din mulțimea *R* este egală cu $S = \frac{47 \cdot 48}{2} \cdot \frac{1}{48} = \frac{47}{2} = 23{,}5$	**2p**
	b) Răspuns: eliminăm 6 elemente. Cum suma *S* trebuie să scadă cu 0,5 trebuie să-l exprimăm pe acesta ca sumă de cât mai multe elemente din *R*. Avem $0{,}5 = \frac{24}{48} = \frac{1+2+3+4+5+9}{48}$. Deci, eliminăm cel puțin 6 elemente.	**3p**
	Dacă am elimina cel puțin 7 elemente, suma lor ar fi cel puțin egală cu $\frac{1+2+3+4+5+6+7}{48} = \frac{28}{48} > 0{,}5$	**2p**
3.	Răspuns: 1 element **a)** Dacă $n \in S$, atunci $n = \overline{ab,(ab)} + \overline{cd,(cd)} = \frac{100\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)}{99}$.	**1p**
	Avem $n \in \mathbb{N}$, dacă şi numai dacă $99 \mid \overline{ab} + \overline{cd}$.	**1p**
	Cum $0 \cdot 99 < \overline{ab} + \overline{cd} \leq 196 < 2 \cdot 99$, rezultă că $\overline{ab} + \overline{cd} = 99$, deci $n = 100$ şi $S \cap \mathbb{N} = \{100\}$	**1p**
	b) Numărul $n = \frac{100\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)}{99} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot \frac{\overline{ab} + \overline{cd}}{11}$ este pătrat de număr rațional dacă şi numai dacă $22 \leq \overline{ab} + \overline{cd} = k^2 \cdot 11 \leq 196$, $k \in \mathbb{N}$. Obținem $k \in \{2;3;4\}$	**3p**
	Numerele căutate sunt $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot 2^2$; $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot 3^2$ şi $\left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot 4^2$	**1p**
4.	În interiorul unghiului *xOy* se pot construi, în total, 89 de semidrepte diferite	**1p**
	Există 9 perechi de unghiuri complementare ale căror măsuri sunt numere prime şi anume: $(7;83);(11;79);(17;73);(19;71);(23;67);(29;61);(31;59);(37;53);(43;47)$	**4p**
	Trebuie construite $n_{\min} = 89 - 2 \cdot 9 + 1 = 72$ semidrepte	**2p**