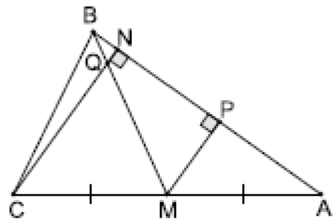
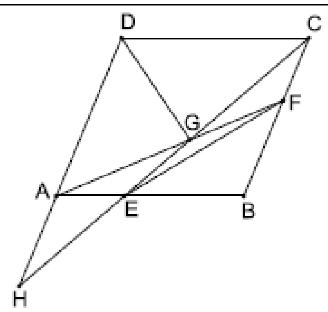
MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREŞTI

Concursul Interjudețean de Matematică al Şcolii gimnaziale nr. 56
Ediția a XII - a, 26.01.2013

Soluții şi bareme clasa a VII - a

1.	 Fie P mijlocul segmentului $[AN]$. Rezultă că $[MP]$ este linie mijlocie în triunghiul ACN. Prin urmare, $MP \parallel CN$, deci $MP \perp AB$. (1) Pe de altă parte, $MP = \frac{CN}{2} = \frac{BM}{2}$. (2) Din(1) şi (2), rezultă că $m\left(\widehat{BMP}\right) = 30^\circ$. Din triunghiul dreptunghic BNQ, $m\left(\widehat{NBQ}\right) = 30^\circ$, deducem $BQ = 2 \cdot QN$	**2p** **1p** **1p** **2p** **1p**
2.	Înmulțind primele trei relații din ipoteză obținem $abc = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.	**2p**
	Obținem $a^2 = 6$, deci $a \in \left\{\pm\sqrt{6}\right\}$, $b^2 = 2$, deci $b \in \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$ şi $c^2 = 12$, deci $c \in \left\{\pm\sqrt{12}\right\}$.	**3p**
	Sumele pozitive sunt $\sqrt{12} + \sqrt{6} + \sqrt{2} > \sqrt{12} + \sqrt{6} - \sqrt{2} > \sqrt{12} - \sqrt{6} + \sqrt{2} > -\sqrt{12} + \sqrt{6} + \sqrt{2} > 0$. Celelalte sume posibile sunt opusele acestora. Rezultă $s_{\min} = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{12}$.	**2p**
3.	 Fie $\{H\} = CE \cap AD$. Triunghiurile HAG şi CFG sunt asemenea, deci $\frac{CG}{GH} = \frac{CF}{AH} = \frac{AE}{AH}$. (1) Triunghiurile HAE şi HDC sunt asemenea, deci $\frac{AE}{AH} = \frac{DC}{DH}$. (2) Din (1) şi (2), obținem $\frac{CG}{GH} = \frac{DC}{DH}$ şi, conform *reciprocei teoremei bisectoarei*, rezultă concluzia.	**3p** **2p** **2p**
4.	Fracțiille din mulțimea F sunt de forma $\frac{a}{2013 - a}$. Cum $a < 2013 - a$, obținem $a < \frac{2013}{2}$. Deci $a \le 1006$. Deducem că mulțime a F conține 1006 fracții. **a)** Presupunem că există k şi l, $k \ne l$, astfel încât $\frac{k}{2013-k} = \frac{l}{2013-l}$. Egalitatea este echivalentă cu $k = l$. Contradicție. Înseamnă că mulțimea F nu conține fracții echivalente, deci fracțiile din mulțimea F reprezintă 1006 numere raționale.	**1p** **1p**

	b) Determinăm numărul de fracții reductibile din *F*. Dacă fracția $\frac{a}{2013-a}$ se simplifică cu *d*, atunci 2013 se divide cu *d*. Deoarece $2013=3\cdot 11\cdot 61$, obținem $d\in\{3;11;61;33;183;671\}$.	**1p**
	Notăm $A=\left\{\frac{a}{b}\in F \,\middle|\, \frac{a}{b}\text{ se simplifica cu }3\right\}$, $B=\left\{\frac{a}{b}\in F \,\middle|\, \frac{a}{b}\text{ se simplifica cu }11\right\}$, $C=\left\{\frac{a}{b}\in F \,\middle|\, \frac{a}{b}\text{ se simplifica cu }61\right\}$. Numărul de fracții reductibile din *F* este egal cu $\text{Card}(A\cup B\cup C)=\text{Card}(A)+\text{Card}(B)+\text{Card}(C)-\text{Card}(A\cup B)-$ $-\text{Card}(B\cup C)-\text{Card}(C\cup A)+\text{Card}(A\cap B\cap C)$.	**1p**
	Avem $\text{Card}(A)=\left[\frac{1006}{3}\right]=335$, $\text{Card}(B)=\left[\frac{1006}{11}\right]=91$, $\text{Card}(C)=\left[\frac{1006}{61}\right]=16$,	**1p**
	$\text{Card}(A\cap B)=\left[\frac{1006}{33}\right]=30$, $\text{Card}(B\cap C)=\left[\frac{1006}{671}\right]=1$, $\text{Card}(A\cap C)=\left[\frac{1006}{183}\right]=5$ și $\text{Card}(A\cap B\cap C)=\left[\frac{1006}{2013}\right]=0$.	**1p**
	În total, se simplifică $335+91+16-30-1-5+0=406$ fracții. Prin urmare, mulțimea *F* conține $1006-406=600$ fracții ireductibile.	**1p**