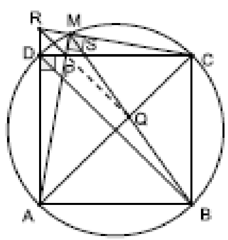
MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

ŞCOALA GIMNAZIALA nr. 56 – BUCUREȘTI

Concursul Interjudețean de Matematică al Şcolii gimnaziale nr. 56
Ediția a XII - a, 26.01.2013

Soluții şi bareme clasa a VIII - a

1.	**a)** Avem $ab=a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Egalitate pentru $a=b=2$	**2p**
	Deducem că $\sqrt{ab}\ge 2$, echivalent cu $a+b=ab\ge 4$.	**1p**
	b) Notăm $ab=a+b=k\ge 4$.Relația din enunț este echivalentă cu $2a\left(a^2+4\right)+2b\left(b^2+4\right)-\left(a^2+4\right)\left(b^2+4\right)\ge 0$	**2p**
	Înlocuind, echivalența devine $2k^3-11k^2+16k-16\ge 0$, sau $(k-4)\left(2k^2-3k+4\right)\ge 0$	**1p**
	Deoarece $k-4\ge 0$ şi $2k^2-3k+4=2k(k-4)+5k+4>0$, rezultă concluzia	**1p**
2.	 În triunghiul *RAC*, punctul *P* este ortocentru, prin urmare $RP\perp AC$. (*)	**1p**
	Semidreapta $(MB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$. Conform *teoremei bisectoarei* în trunghiul *MAC*, obținem $\frac{MC}{MA}=\frac{CQ}{QA}$. Cum $\triangle SQC\sim\triangle BQA$, avem $\frac{CQ}{QA}=\frac{SQ}{QB}$. (1)	**1p**
	Deasemenea, $\frac{CQ}{QA}=\frac{SC}{AB}=\frac{SC}{BC}$.(2) Cum $\triangle SCB\sim\triangle SMD$, rezultă $\frac{SC}{BC}=\frac{MS}{MD}$. (3)	**2p**
	Conform *teoremei bisectoarei* în trunghiul *MDS*, obținem $\frac{MS}{MD}=\frac{SP}{PD}$. (4)	**1p**
	Din (1), (2), (3), (4) obținem $\frac{SP}{PD}=\frac{SQ}{QB}$ şi, conform *reciprocei teoremei lui Thales*, avem $PQ\parallel DB$.	**1p**
	Cum $DB\perp AC$, rezultă $PQ\perp AC$ (**). Din (*) şi (**), rezultă concluzia	**1p**
3.	Evident $x\ne 0$. Notăm $[x]=p\in\mathbb{Z}^*$ şi $0<\{x\}=q<1$. Ecuația este echivalentă cu $4q^2+7pq-2p^2=0$. Sau $(q+2)(4q-p)=0$.	**4p**
	Deoarece $q+2>0$, rezultă $p=4q<4$. Deci $p\in\{1;2;3\}$.	**2p**
	Obținem soluțiile $x_1=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, $x_2=2+\frac{2}{4}=\frac{3}{2}$, $x_3=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$.	**1p**
4.	Situația care convine problemei este $A'C'=A'M=MC=AC=\sqrt{a^2+b^2}$	**2p**
	a) Rezultă că $B'M=b$ şi $MB=a$, deci $BB'=a+b$	**1p**
	b) Dacă $\{N\}=MC'\cap BC$, rezultă $MB=BN=a$.	**2p**
	Obținem $MA=MN=AN=a\sqrt{2}$, deci $m\left(\widehat{AMN}\right)=60^\circ$, adică m $m\left(\widehat{AMC'}\right)=120^\circ$	**2p**