MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sighişoara, 2 Aprilie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a V-a

Problema 1. Un număr natural de patru cifre diferite două câte două, având forma $\overline{abcd}$, se numeşte *interesant* dacă $a \cdot d + b \cdot c = 33$. Arătaţi că suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11.

Soluţie. Dacă $\overline{abcd}$ este număr interesant, atunci şi numerele $\overline{badc}$, $\overline{cdab}$ şi $\overline{dcba}$ sunt numere interesante.

Din observaţia de mai sus deducem că numerele interesante se pot grupa, după această regulă, câte patru.

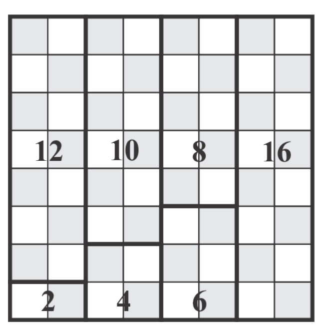
Avem $\overline{abcd}+\overline{badc}+\overline{cdab}+\overline{dcba} = 1111 \cdot (a+b+c+d)$ care este multiplu de 11.

În concluzie, suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11.

Problema 2. Considerăm o descompunere a tablei de şah 8×8 în p dreptunghiuri care nu se suprapun, astfel încât fiecare dreptunghi să conţină un număr întreg de pătrăţele, dintre care jumătate să fie albe şi să nu existe două dreptunghiuri având acelaşi număr de pătrăţele. Determinaţi valoarea maximă a lui p.

Soluţie. Dacă $p \geq 8$, dreptunghiurile vor conţine, în total, cel puţin $2+4+6+8+10+12+14+16 = 72$ pătrăţele, ceea ce este imposibil, tabla de şah având numai 64 de pătrăţele.

Pentru $p = 7$ avem posibilitatea să descompunem tabla. Iată un exemplu:



Problema 3. Fie a, b, c, d, x, y, z, t cifre astfel încât $0 < a < b \leq c < d$ şi

$$\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}.$$

Determinaţi toate valorile posibile ale sumei

$$S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}.$$

Soluţie. Cum $\overline{xyzt} = \overline{dcba} - \overline{abcd}$ rezultă $t = 10 + a - b$.
Cazul I. Dacă $b = c$, atunci $z = y = 9$ şi $x = d - a - 1$.
Cazul II. Dacă $b < c$, atunci $z = 9 + b - c$, $y = c - b - 1$ şi $x = d - a$.
Avem $\overline{xyzt} + \overline{tzyx} = 1001(x + t) + 110(y + z)$.
În cazul I, $x + t = 9$ şi $y + z = 18$, de unde $S = 9009 + 1980 = 10989$.
În cazul II, $x + t = 10$ şi $y + z = 8$, de unde $S = 10010 + 880 = 10890$.

Problema 4. Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, acolo se aflau jumătate din numărul elevilor aflaţi încă pe traseu. Bianca a sosit a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puţini elevi decât cei ajunşi înaintea sa. Câţi elevi au fost în total?

Soluţie. Să presupunem că Andrei se află pe poziţia n. Atunci înaintea lui sunt $n - 1$, iar în urma lui sunt $2n - 2$ elevi.

Bianca se află pe poziţia $n + 10$. Înaintea ei sunt $n + 9$, iar în urma ei sunt $\frac{n+9}{2}$.

Numărul elevilor, raportat la Andrei, este $n + 2n - 2 = 3n - 2$.

Numărul elevilor, raportat la Bianca, este $n + 10 + \frac{n+9}{2}$.

Obţinem ecuaţia

$$3n - 2 = n + 10 + \frac{n + 9}{2}$$

cu soluţia $n = 11$.

Numărul de copii este 31.