



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sighișoara, 2 Aprilie 2013

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a VI-a

Problema 1. Ana, Barbu, Carmen și Dan au de rezolvat 60 de probleme. Ana a rezolvat 45 dintre ele, Barbu a rezolvat 48, Carmen a rezolvat 44, iar Dan a rezolvat 47 de probleme. Arătați că probabilitatea ca o problemă din cele 60 să fie rezolvată de toți cei patru este cel puțin egală cu $\frac{1}{15}$.

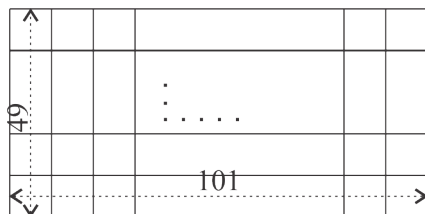
Soluție. Ana nu rezolvă 15 probleme, Barbu nu rezolvă 12 probleme, Carmen nu rezolvă 16 probleme, Dan nu rezolvă 13 probleme.

În total, pot rămâne cel mult $15 + 12 + 16 + 13 = 56$ de probleme care să fie nerezolvate de cel puțin un copil. Cum sunt 60 de probleme, există cel puțin 4 probleme rezolvate de toți copiii.

De aici probabilitatea ca o problemă să fie rezolvată de toți copiii este de cel puțin $\frac{4}{60}$, adică $\frac{1}{15}$.

Problema 2. Dreptunghiul din figura de mai jos este împărțit în 49×101 pătrate egale. În pătratul din stânga jos se află o monedă. Doi copii imaginează următorul joc: pe rând, fiecare dintre ei mută moneda din locul în care se află pe un pătrat oarecare situat la dreapta, pe aceeași linie sau pe un pătrat oarecare situat deasupra, pe aceeași coloană. Câștigă jucătorul care plasează moneda în pătratul din dreapta sus.

Arătați că primul jucător poate câștiga, oricum ar juca cel de-al doilea.



Soluție. Primul jucător mută moneda pe orizontală la dreapta până la poziția 53. Moneda se va afla în pătratul (53, 1).

Mai departe, la orice mutare efectuată de cel de-al doilea jucător pe o direcție (orizontală sau verticală) cu un anumit număr de căsuțe, primul jucător mută pe cealaltă direcție un număr identic de căsuțe, astfel încât să ajungă pe poziția $(53 + i, i + 1)$ cu $1 \leq i \leq 48$, adică pe diagonala pătratului de latură 49 și cu unul dintre vârfuri în colțul din dreapta sus, de poziție (101, 49).

Problema 3. Se consideră numerele prime $p < q < r$ și numărul natural nenul $a < p$. Numărul n este cel mai mic număr natural nenul care împărțit la p , q și r dă, de fiecare dată, restul cu a mai mic decât împărțitorul.

a) Determinați, în funcție de p , q , r și a , numărul n .

b) Dacă $n = 1000$, determinați valorile posibile ale lui a .

Soluție: a) Din enunț $n = pc_1 + p - a$ sau $n + a = p(c_1 + 1)$, de unde deducem că $p \mid n + a$.

Analog deducem $q \mid n + a$ și $r \mid n + a$.

Cum p , q , r sunt numere prime diferite rezultă că $pqr \mid n + a$, de unde $n = pqr - a$.

b) $n = 1000$ implică $pqr - a = 1000$. Din $a < p$ rezultă că $pqr - p < 1000$ sau $p(qr - 1) < 1000$. Dacă $p \geq 11$, atunci $q \geq 13$ și $r \geq 17$, de unde $p(qr - 1) \geq 11 \cdot (13 \cdot 17 - 1)$, adică $p(qr - 1) \geq 1000$. Deducem că $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Deoarece $a < p$ avem $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

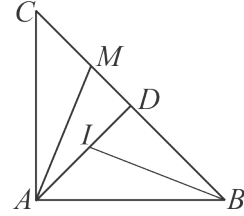
Dacă a este par, atunci $1000 + a$ este divizibil cu 2, deci $p = 2 \leq a$ - fals.

Dacă $a = 1$ obținem soluția $p = 7, q = 11, r = 13$.

Cazul $a = 3 < p \leq 7$ nu este posibil, deoarece 1003 nu este divizibil cu 5 sau 7.

Cazul $a = 5 < p \leq 7$ nu este posibil, deoarece 1005 este divizibil cu 3.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în punctul I . Demonstrați că $BA + AI = BC$.



Soluție. Triunghiul ABC isoscel de bază $[BC]$ și $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ implică $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$.

Din $[BI]$ bisectoarea unghiului ABC rezultă $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CBI}) = 22^\circ 30'$.

Considerăm punctul $M \in (BC)$ astfel încât $AB = BM$ și atunci triunghiul ABM este isoscel de bază $[AM]$, de unde $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BMA}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{ABM})}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30'$.

Avem $m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{BAM}) = 90^\circ - 67^\circ 30' = 22^\circ 30'$.

În triunghiul isoscel ABC , de bază $[BC]$, cum AD este înălțime rezultă $[AD]$ bisectoarea unghiului BAC , de unde $m(\widehat{BAD}) = 45^\circ$.

Din $AB = AC$, $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CAM}) = 22^\circ 30'$ și $m(\widehat{BAI}) = m(\widehat{ACM}) = 45^\circ$, conform cazului de congruență U.L.U. obținem $\triangle ABI \equiv \triangle CAM$, de unde $AI = CM$.

Avem $BC = BM + MC = AB + AI$.