OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013

SUBIECTE - clasa a XII-a:

1. Se consideră mulţimea $G=(-1;1)$. Pentru orice $x, y \in G$ definim $x * y=\frac{x+y}{1+xy}$.

a) Arătaţi că $(G,*)$ este o structură algebrică de grup abelian.

b) Determinaţi numărul real a dacă există un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(R_{+}^{*},+)$ de forma $f(x)=\frac{a-x}{a+x}$.

c) Pentru orice n număr natural, $n \geq 2$, calculaţi valoarea expresiei $E(n)=\frac{1}{7}*\frac{1}{17}*\frac{1}{31}*...*\frac{1}{2n^2-1}$.

2.

a) Calculaţi $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calculaţi $\int \frac{1}{\sin x} dx$, $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Studiaţi dacă $f: R \rightarrow R$, $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{daca } x \in Q \\ \frac{1}{x} & \text{daca } x \in R-Q \end{cases}$ admite primitive pe R.

3. Fie $f: G \rightarrow G'$ un morfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(G',*)$. Arătați că:

a) $f(e)=e'$, e și e' reprezintă elementul neutru din grupul $(G,\circ)$ și respectiv $(G',*)$. $f(x')=(f(x))'$, x' și $(f(x))'$ reprezintă simetricul elementului x respectiv f(x).

b) Imf = $\{y \in G' \mid y=f(x), x \in G\}$ este subgrup al lui G’.

c) Kerf = $\{x \in G \mid f(x)=e'\}$ este subgrup al lui G.

4.

a) Fie funcţia $f:[0,1] \rightarrow R$, $f(x)=\frac{1+[x]}{1+x+[3x]}$, unde prin $[\alpha]$ înţelegem partea întreagă a numărului real α. Demonstraţi că funcţia este integrabilă pe [0,1] şi calculaţi integrala definită pe acest interval.

b) Calculaţi $\int \frac{1}{x(1+x^n)} dx$, $x>0$, $n \in N^*$.

c) Calculaţi $\int \frac{(1+x)\ln x \cdot e^{-x}}{(1-x\ln x)^2} dx$, $x>e$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 puncte.

succes!

prof.Zeno Blajovan, inspector de specialitate - I.S.J. Timiş