MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013
SUBIECTE - clasa a IX-a matematică-informatică:

1. **a)** Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei :

$$\left[\frac{x-n}{n+1}\right]=\frac{x-n-1}{n}, n\in N^{*} \text{ fixat,}$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a

b) Să se rezolve ecuaţia:

$$\left[\frac{[x+1]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2]}{3}\right]+\left[\frac{[x+3]}{3}\right]=x+1,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

2. **a)** Să se demonstreze inegalitatea:

$$a^3+b^3\geq a^2b+ab^2, \forall a,b>0;$$

b) Folosind eventual subpunctul a) demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+\sqrt{abc}}+\frac{1}{b\sqrt{b}+c\sqrt{c}+\sqrt{abc}}+\frac{1}{c\sqrt{c}+a\sqrt{a}+\sqrt{abc}}\leq\frac{1}{\sqrt{abc}}, \forall a,b,c>0$$

3. **a)** Să se demonstreze că dacă $x\in R^{*}$ si $x+\frac{1}{x}\in Z$ atunci $x^n+\frac{1}{x^n}\in Z, \forall n\in N$;

b) Să se demonstreze că $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\in Z, \forall n\in N$.

4. Fie triunghiul ABC si $D\in(BC)$ astfel încat $BD=2DC$. Notăm cu E mijlocul segmentului AB, iar cu F mijlocul medianei din C .

a) Să se arate că dacă $M\in(BC)$ astfel încat $\frac{BM}{MC}=k$, atunci are loc relaţia:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC};$$

b) Să se demonstreze că punctele A, F, D sunt coliniare şi să se determine $\alpha\in R$ astfel încat $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{DA}$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

succes!

prof.Zeno Blajovan, inspector de specialitate - I.S.J. Timiş