Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a X-a

1. Fie a, b, c numere complexe nenule cu $|a| = |b| = |c|$. Arătaţi că dacă ecuaţia $az^2 + bz + c = 0$ are o soluţie de modul egal cu 1, atunci $b^2 = ac$.

2. a) Să se descompună în factori expresia

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y).$$

b) Fie P un punct oarecare în planul unui triunghi oarecare ABC de laturi $BC = a, CA = b, AB = c$. Să se arate că are loc inegalitatea

$$a \cdot PA^3 + b \cdot PB^3 + c \cdot PC^3 \geq 3abc \cdot PG,$$

unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

3. a) Să se arate că pentru orice două numere reale strict pozitive $a < b$ şi pentru orice număr natural n există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$a^n - b^n = n(a-b)c^{n-1}.$$

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$4^m + 7^m = 5^m + 6^m.$$

4. a) Fiind dat un triunghi ascuţitunghic ABC punctul unic Ω situat în interiorul triunghiului cu proprietatea că

$$\angle\Omega BC \equiv \angle\Omega CA \equiv \angle\Omega AB$$

se numeşte *punctul Brocard* al triunghiului ABC. Măsura comună a celor trei unghiuri de mai sus se notează cu ω. Să se arate că are loc egalitatea

$$\mathrm{ctg}\omega = \mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C.$$

b) Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic ABC are loc inegalitatea

$$\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C \geq \sqrt{3}.$$

c) Să se arate că pentru orice punct P situat în interiorul unui triunghi ascuţitunghic ABC cel puţin unul dintre unghiurile $\angle PBC, \angle PCA, \angle PAB$ are măsura mai mică sau egală decât $30°$.

Probleme selecţionate de lector univ. dr. Ioan Caşu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!