

Concursul interjudețean de matematică ”Traian Lalescu”
Ediția a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a XI-a

1. Fie $\text{Circ}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \text{circ}(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$ și $E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{bmatrix}$,
unde $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$.

- (a) Arătați că pentru fiecare $A \in \text{Circ}(3, \mathbb{C})$, matricea $E^{-1}AE$ are toate elementele nesituate pe diagonala principală, nule.
- (b) Fie A, B, C vârfurile unui triunghi. Dacă notăm cu a, b, c afixele punctelor A, B, C , arătați că $\det(\text{circ}(a, b, c)) = 0$ dacă și numai dacă punctul O de afix 0 este centrul de greutate al ΔABC , sau dacă ΔABC este echilateral.

2. Determinați toate funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan condițiile:

(a) $f(xy) = f(x) \cdot \sqrt[3]{y} + f(y) \cdot \sqrt{x}$, pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x} = l \in \mathbb{R}$.

3. (a) Dacă $A \in \mathcal{M}_{2013}(\mathbb{R})$, arătați că $(A^2 + I_{2013})^m \neq O_{2013}$, pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

(b) Rămâne adevărată cerința similară celei de la subpunctul anterior în cazul când $A \in \mathcal{M}_{2014}(\mathbb{R})$?
Justificați răspunsul.

4. Se dă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, definit prin recurența

$$x_n = \frac{n+1}{n} \cdot x_{n-1} - \left\{ \frac{x_{n-1}}{n} \right\}, \text{ pentru orice } n \geq 1, \text{ unde } x_0 = a \geq 1.$$

(a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{[a] \cdot n} \right)^n$.

(b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left([x_0] + \left[\frac{x_1}{2} \right] + \left[\frac{x_2}{3} \right] + \dots + \left[\frac{x_{n-1}}{n} \right] \right)$.

(Prin $[x]$, $\{x\}$ am notat partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .)

Subiect propus de conf.dr. Răzvan Tudoran

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și sunt punctate cu note cuprinse între 1 și 10.

Succes!