Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a XII-a

1. a) Fie $G = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Este grupul $(\mathbb{Q}, +)$ izomorf cu $(G, \cdot)$?
b) Sunt izomorfe grupurile multiplicative $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$?

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi aplicaţia $f : G \longrightarrow G$ definită prin $f(x) = x^3$, $(\forall) x \in G$. Demonstraţi că
a) dacă f este morfism injectiv, atunci G este abelian.
b) dacă f este morfism surjectiv, atunci G este abelian.

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea:

$$f(x) \geq \frac{1}{x} \quad , (\forall) x > 0.$$

Demonstraţi că f nu admite primitive.

4. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietăţile:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{şi} \quad \int_0^1 x f(x)\,dx = 0\,.$$

Demonstraţi că există $a, b \in [0, 1], a \neq b$, astfel încât $f(a) = f(b) = 0$.

Subiect propus de conf.dr. Silviu Birăuaş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!