Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a IX-a

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ şi

$$x_{n+2} = \text{restul împărţirii numărului } 23x_n + 27x_{n+1} \text{ prin } 2013\,.$$

Arătaţi că există $n_0, k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_{n+k} = x_n$, $(\forall)n \geq n_0$.

2. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 = 2y \\ y^3 - y + 2 = 2z \\ z^3 - z + 2 = 2x. \end{cases}$$

3. Fie ABC un triunghi oarecare, de laturi a, b şi c, D - punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează cercul circumscris triunghiului, iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ puncte diferite de vârfurile triunghiului.

a) Determinaţi $y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{AD} = y \cdot \overline{AB} + z \cdot \overline{AC}\,.$$

b) Dacă P_1, P_2, P_3 sunt trei puncte în planul $\mathcal{P}$ al triunghiului, iar $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, i = \overline{1,3}$ sunt trei triplete de numere reale cu proprietatea că $x_i + y_i + z_i = 1$, $(\forall)i = \overline{1,3}$ şi

$$\overline{OP_i} = x_i \cdot \overline{OA} + y_i \cdot \overline{OB} + z_i \cdot \overline{OC} \quad , (\forall)O \in \mathcal{P},$$

atunci punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă există $u, v, w \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$ux_i + vy_i + wz_i = 0 \quad , (\forall)i = \overline{1,3}.$$

c) Arătaţi că punctele M, N şi D sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$b \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} + c \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \frac{a^2}{b+c}\,.$$

4. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$.

a) Arătaţi că dacă o dreaptă (d) care trece prin vârful A al triunghiului intersectează dreapta BC într-un punct P, iar cercul circumscris triunghiului ABC a doua oară într-un punct Q, atunci $AP \cdot AQ = AB^2$.

b) Fie $\mathcal{C}$ un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC într-un punct M aflat pe arcul BC care nu coţine punctul A, şi tangent laturii $[BC]$ a triunghiului într-un punct N. Arătaţi că punctele A, M şi N sunt coliniare.

Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.

Succes!