OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 9 februarie 2013

Clasa a XI-a

Subiectul I

Se consideră matricea $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,2013}}\in\mathcal{M}_{2013}(\mathbb{R})$; $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{pentru } i=j\\ -1 & \text{pentru } i\neq j\end{cases}$. O mutare în matricea A constă din alegerea unei linii sau coloane şi schimbarea semnelor elementelor ei. Este posibil ca după 2013 mutări să obţinem două linii sau coloane identice?

Gazeta Matematică, enunţ adaptat

Subiectul II

Rezolvaţi ecuaţia $X^3=\begin{pmatrix}19 & 30\\ -45 & -71\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Mihaly Bencze

Subiectul III

Se consideră şirul de numere reale $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$, $a_n=e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}}$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=e^{\gamma}$, unde $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ este constanta lui Euler.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

Gabriela Boeriu

Subiectul IV

Fie şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$, $a_0\in(0,\infty)$ şi $a_{n+1}=\frac{9a_n^3+8a_n}{9}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Arătaţi că, pentru $a_0\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$, şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

b) Arătaţi că, pentru $a_0\in\left(\frac{1}{3},\infty\right)$, şirul $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ este divergent.

Aurel Aldea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timpul de lucru este de 3 ore.

Şirul Gheorghe Dima nr. 4, 500123 Braşov; Tel: +40-268-415104; Fax: +40-268-475621; e-Mail: info@isjbrasov.ro
www.isjbrasov.ro