OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 09.02.2013

Clasa a VII-a

Problema 1

a) Se dau numerele: $A=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{4}}{5}+\frac{\sqrt{6}}{7}+\ldots+\frac{\sqrt{2012}}{2013}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2012}}\right)$

$B=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{4}}+\frac{7}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{2013}{\sqrt{2012}}\right)-\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{6\sqrt{4}}{5}+\frac{8\sqrt{6}}{7}+\cdots+\frac{2014\sqrt{2012}}{2013}\right)$.

Demonstrați că $|A+x|=|B-x|,\ \forall x\in R$.

b) Rezolvați ecuația: $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-2012|=2013(x-2013)$

Problema 2

a) Arătați că pentru orice $n\in N-\{0,1\}$ avem $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$.

b) Se consideră numărul $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}$. Demonstrați că $0{,}2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3$.

Problema 3

În trapezul $ABCD$ se ştie că $AD\parallel BC, AC\perp BD, AC=6{,}5$ cm şi $BD=4{,}8$ cm.

a) Calculați aria trapezului $ABCD$.

b) Paralela prin punctul A la dreapta BD intersectează dreapta BC în punctul E. Aflați aria triunghiului AEC.

Problema 4

Fie triunghiul oarecare ABC, punctul $D\in AB, B\in[AD]$, astfel încât $[BD]\equiv[BC]$ şi $E\in AC$ astfel încât $C\in[AE]$. Dacă M este punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor ABC şi ACB, iar N este punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului BCED, arătați că BMCN este paralelogram dacă şi numai dacă $[BC]\equiv[CE]$.

Probleme selectate de Prof. Cicortaş Marius

Notă: a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
b) Toate problemele sunt obligatorii.
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.