COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a X-a

Subiectul 1. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in (1, +\infty)$. Arătați că:

a) $\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \log_{a_3} a_4 + ... + \log_{a_n} a_1 \geq n$;

b) $\log_3(2a_1 + a_2) + \log_3(2a_2 + a_3) + ... + \log_3(2a_n + a_1) \geq$
$\geq \log_3(a_1) + \log_3(a_2) + ... + \log_3(a_n) + n$.

Subiectul 2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ afixele punctelor necoliniare *A*, *B*, *C* cu proprietatea $|z_2 - z_3| + |z_1 - z_3| + |z_1 - z_2| = 1$ şi considerăm numărul complex $z = z_1 \cdot |z_2 - z_3| + z_2 \cdot |z_1 - z_3| + z_3 \cdot |z_1 - z_2|$. Dacă *M* este de afix *z*, atunci *M* este la egală distanță de dreptele *AB*, *AC* şi *BC*.

Subiectul 3. Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$ şi $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale cu proprietatea $a_k + a_{n-k} = \alpha$, pentru orice $k = 0, 1, ..., n$, $n \geq 2$. Dacă *x* este un număr complex de modul 1 care verifică egalitatea $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$, atunci arătați că $a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + ... + a_n x + a_0 = 0$.

Subiectul 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ o funcție monotonă cu proprietatea $f(x+3) = f(x) + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că ecuația $f(x) = x$ are cel puțin o soluție.

Timp de lucru: 3 ore

SUCCES!