INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA a IX a

1. Fie a,b,c numere întregi, cu $a^2-4b=c^2$. Să se arate că numărul a^2-2b se scrie ca sumă de două pătrate perfecte.

***Julieta Raicu*, Blaj (Gazeta matematică 2012)**

2. Se consideră triunghiul ABC oarecare, având lungimile laturilor $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC Şi punctele $M\in(BC)$, $N\in(CA)$, $P\in(AB)$ astfel încât

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\frac{MB}{MC}=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\frac{NC}{NA}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{PA}{PB}=1.$$

Să se arate că:

a) $AM\cap BN\cap CP=\{K\}$ (punctul lui Lemoine);

b) vectorii $\overrightarrow{IK}$ Şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari dacă Şi numai dacă $a=\dfrac{b^2+c^2}{b+c}$;

c) $\overrightarrow{IK}=\vec{0}$ dacă Şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

***Gheorghe Alexe*, Brăila**

3. Rezolvaţi ecuaţia

$$x=\frac{[x]+2012}{\{x\}+2013},$$

unde $[x]$ Şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă şi respectiv partea fracţionară pentru numărul real x.

Marius Damian Şi Valentin Damian, Brăila

4. Fie $A_n=\{4,11,18,25,32,...,7n-3\}$ Şi $B_n=\{x\in A_n \mid x \text{ este pătrat perfect}\}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Notăm Card $A_n=a_n$ Şi Card $B_n=b_n$.

a) Să se determine b_{288}.

b) Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ Ştiind că $a_n=120+b_n$.

***Gabriel Daniilescu*, Brăila**

Notă.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.
Timp de lucru 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA a X a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$5-\sin^2 x-2\cos x=\left[-2x^2-x+3\right].$$

Narcis Gabriel Turcu

2. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left(3\cdot 2^{2a}-2\cdot 2^{a}+1\right)\left(3\cdot \log_2^2 a+2\cdot \log_2 a+1\right)>8\cdot 2^{a}\cdot \log_2 a,\text{ pentru } a>1.$$

Costel Cerchez

3. Fie triunghiul ABC, unde $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)\in \mathcal{C}(O;1)$.

Dacă $|k\cdot z_A-z_B-z_C|=|k\cdot z_B-z_A-z_C|=|k\cdot z_C-z_A-z_B|$, unde $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, k fixat, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gheorghe Alexe

4.a) Dacă $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|$ şi $z_1+z_2>0$, să se demonstreze că $z_1\cdot z_2>0$.

b) Să se rezolve inecuaţia $z^2+z\le 0,\ z\in\mathbb{C}$.

***

Notă.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.

Timp de lucru 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA a XI a

1. Să se determine funcţiile $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ care satisfac simultan condiţiile:

i) $f(x)\le\dfrac{x-2}{\ln 2}, x>1;$

ii) $f(x^3+1)\le 3f(x+1), x>0;$

iii) $f(x)+f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\ge 0, x>1;$

Gazeta Matematică

2. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\ge1}$ cu termeni pozitivi şi proprietatea

$x_{n+1}>3x_n, \forall n\ge1, x_1=1,$

$x_2=5$, definit prin relaţia de recurenţă: $\log_2(x_{n+2}-3x_{n+1})+2^{x_{n+2}-3x_{n+1}}=2+\log_2(x_n)+16^{x_n}$.

Adela Dimov, Brăila

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}9 & 2 & 9\\ 1 & 18 & 1\\ 9 & 2 & 9\end{pmatrix}$.

a) Aflaţi $A^n, n\ge1$.

b) Demonstraţi că matricea A^n+I_3 este inversabilă, $\forall n\ge2$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

4. Fie $A_n=\{1,5,9,13,...,4n+1\}$ şi a_n numărul pătratelor perfecte din mulţimea $A_n, \forall n\ge1$.

i) Să se determine a_{503}.

ii) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{a_k}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Notă.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.
Timp de lucru 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BRĂILA
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA a XII a

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup având elementul neutru e. Arătaţi că dacă există $f:G\to G$ morfism injectiv cu proprietatea $f\left(f\left(x\right)\right)\cdot f\left(x\right)=e, \forall x\in G,$ atunci G este abelian.

2.Să se determine primitiva F a functiei $f:R\to R$ dată de

$$f\left(x\right)=\left(1+3x^2\right)\cdot\ln\left(1+x^2\right)arctgx$$

cu proprietatea $F\left(0\right)=0$

Gazeta Matematică nr.7/2007

3.Să se calculeze:

$$I=\int_0^a \frac{\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}}{x^2-ax+a^2}dx, a>0$$

Gazeta Matematică nr.6/2005

4. Fie $\mathbb{Z}_{30}=\left\{\overline{0},\overline{1},..........,\overline{29}\right\}$ şi

$\mathbb{Z}_{31}^*=\left\{\hat{1},\hat{2},..........,\widehat{30}\right\}$

a)Dacă $f:(\mathbb{Z}_{30},+)\to\left(\mathbb{Z}_{31}^*,\cdot\right)$ este morfism de grupuri, atunci $f\left(\overline{18}\right)\neq\hat{3}$ şi există $g:(\mathbb{Z}_{30},+)\to\left(\mathbb{Z}_{31}^*,\cdot\right)$ morfism astfel încât $g\left(\overline{18}\right)=\hat{1}$

b)Să se rezolve în $\left(\mathbb{Z}_{31}^*,\cdot\right)$ ecuaţia: $\widehat{X}^2=\hat{1}$ şi să se calculeze produsul elementelor din $\left(\mathbb{Z}_{31}^*,\cdot\right)$

c)Să se dea exemplu de subgrup propriu de ordin 2, 3, 5 din $\left(\mathbb{Z}_{31}^*,\cdot\right)$. Există subgrup de ordin 4 în $\left(\mathbb{Z}_{31}^*,\cdot\right)$?

Prof. Alexe Gheorghe,Braila

Notă.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect.
Timp de lucru 3 ore.