Inspectoratul Școlar al Județului Arad

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
16 februarie 2013

CLASA a IX-a

1. Fie $a,b,c \in (0,1)$ astfel încât $a+b+c=1$. Demonstrați că

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}}+\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}}+\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}}\geq 3$$

2. Se consideră triunghiul ABC , M mijlocul lui $[AB]$ și punctele $D\in(BC), E\in(AC)$ astfel încât $\overrightarrow{BD}=k\cdot\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AE}=k\cdot\overrightarrow{EC}$. Fie $BE\cap DM=\{F\}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EM}$ și $\overrightarrow{CF}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $k=3$.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât $a_1=a_2=1$ și $a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{3^n}, (\forall) n\geq 1$. Să se arate că $a_n<2, (\forall) n\geq 1$.

4. Să se rezolve ecuația : $3\{x\}-[x]=\frac{1}{4}$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .
Timp de lucru 3ore .

Inspectoratul Școlar al județului Arad

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
16 februarie 2013

CLASA a X-a

1. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\frac{\log_x y}{x+y}+\frac{\log_y z}{y+z}+\frac{\log_z x}{z+x}\geq \frac{9}{2(x+y+z)},(\forall)x,y,z\in(0,1) \text{ sau } x,y,z\in(1,\infty)$$

2. Fie $a>0, a\neq 1$. Să se determine toate funcțiile $f:[0,1]\to R$ care verifică simultan condițiile : (i) $|f(x)-f(y)|\leq |a^x-a^y|,(\forall)x,y\in[0,1]$;

(ii) $\{f(0),f(1)\}=\{1,a\}$.

3. Fie $z_1,z_2,z_3\in C$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$.
Știind că $(z_1+z_2)\cdot z_1z_2+(z_2+z_3)\cdot z_2z_3+(z_3+z_1)\cdot z_3z_1=z_1z_2z_3$,
să se arate că $|z_1+z_2+z_3|=2r$.

4. Fie $x,y,z,b,c,d\in R$ cu proprietățile : $x\geq 0, x+y\geq 0, x+y+z\geq 0,\ b\geq c\geq d>1$. Să se arate că pentru orice $a>1$ au loc inegalitățile :

(i) $b^{a^x}\cdot c^{a^y}\geq bc$;

(ii) $b^{a^x}\cdot c^{a^y}\cdot d^{a^z}\geq bcd$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore .

Inspectoratul Școlar al județului Arad

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
16 februarie 2013

CLASA a XI-a

1. Fie $a,b,c \in R$.

Să se demonstreze egalitatea

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \left(a+b+c\right)^3$$

2. Fie $A, B \in M_2\left(R\right)$ astfel încât $AB = BA$.

Să se arate că $\det\left(A^2 + AB + B^2\right) \geq \left(\det\left(A\right) - \det\left(B\right)\right)^2$.

3. Să se calculeze : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x - \cos^2 2x - 1}{\cos^2 2x + 2\cos^2 x - 1}$

4.Fie $\left(x_n\right)_{n \geq 1}$ un șir mărginit de numere reale cu proprietatea

$$\sqrt{nx_n + n + 1} - \sqrt{nx_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{nx_n + n} - \sqrt{nx_n}\ , \left(\forall\right) n \in N^* \ .$$

Să se arate că șirul este convergent .

Toate subiectele sunt obligatorii .
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .
Timp de lucru 3 ore .

Inspectoratul Școlar al Județului Arad

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
16 februarie 2013

CLASA a XII-a

1. Să se determine funcțiile $f:R\to(0,\infty)$ cu proprietatea că funcția $g:R\to R$,

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x+1}$ este primitiva funcției f pentru care $g(0)=1$.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietățile :

a) $x^3=1$;

b) $(xy)^2=(yx)^2,(\forall)x,y\in G$.

Să se arate că G este grup abelian .

3. Fie $a\in R^*,b>0,I:(0,\infty)\to R,I(t)=\int_0^t e^{-bx}\cdot\sin ax\,dx$.

a) Folosind metoda integrarii prin părți , determinați $I(t)$.

b) Calculați $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$.

4. Fie n un număr natural , $n\geq 2$. Să se arate că dacă ecuația $x+x+x+x=\hat{1}$ nu are soluții în Z_n , atunci ecuația $x+x=\hat{1}$ nu are soluții în Z_n .

Toate subiectele sunt obligatorii .
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .
Timp de lucru 3 ore .