Concursul "Stelele Matematicii" 2012

★ ★ ★ Sâmbătă, 8 decembrie 2012, orele 09:30
★ ★ ★ Liceul Internaţional de Informatică Bucureşti
★ ★ ★ **Proba Seniori**

Problema 1. Numărul natural nenul N este zis *amiabil* dacă mulţimea $\{1, 2, \ldots, N\}$ poate fi partiţionată în perechi de elemente, fiecare pereche având suma elementelor sale un pătrat perfect. Demonstraţi că există infinit de multe numere amiabile care sunt ele însele pătrate perfecte.

Problema 2. Fie o dreaptă ℓ în plan, şi un punct $A \notin \ell$. Fie şi $\alpha \in (0, \pi/2)$ fixat. Determinaţi locul geometric al punctelor Q din plan, pentru care există un punct $P \in \ell$ astfel încât $AQ = PQ$ şi $\angle PAQ = \alpha$.

Problema 3. Fiind date numerele reale a, b, c, diferite două câte două, demonstraţi că inegalitatea

$$\left|\frac{a}{b-c}\right| + \left|\frac{b}{c-a}\right| + \left|\frac{c}{a-b}\right| \geq 2$$

are loc, şi determinaţi toate cazurile de egalitate.

Demonstraţi că dacă impunem şi condiţia $a, b, c > 0$, atunci toate cazurile de egalitate dispar, dar valoarea 2 rămâne ca fiind cea mai bună constantă posibilă.

Problema 4. Celulele unui tablou dreptunghiular de dimensiuni $M \times n$ (cu M linii şi n coloane) sunt colorate, fiecare cu una din două culori, astfel încât pentru orice două coloane numărul perechilor de celule situate pe o aceeaşi linie, şi având o aceeaşi culoare, este mai mic decât numărul perechilor de celule situate pe o aceeaşi linie, dar având culori diferite.

i) Demonstraţi că dacă $M = 2011$, atunci $n \leq 2012$ (un model pentru cazul extrem $n = 2012$ într-adevăr există, dar nu vi se cere să-l prezentaţi).

ii) Demonstraţi că dacă $M = 2011 = n$, fiecare dintre culori apare de cel mult $1006 \cdot 2011$ ori, şi de cel puţin $1005 \cdot 2011$ ori.

iii) Demonstraţi că dacă însă $M = 2012$, atunci $n \leq 1007$.

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru $\mathbf{4\frac{1}{2}}$ ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultăţii - niciuna nu este trivială. Concizia şi claritatea redactării vor fi luate în consideraţie. Încercaţi să nu folosiţi mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★ ★ ★ Mult SUCCES tuturor participanţilor!