

# Concursul “Stelele Matematicii” 2012

★ ★ ★  
★ ★ ★  
★ ★ ★

Sâmbătă, 8 decembrie 2012, orele 09:30  
Liceul Internațional de Informatică București

**Proba Juniori**

**Problema 1.** Fie o dreaptă  $\ell$  în plan, și un punct  $A \notin \ell$ . Determinați locul geometric al punctelor  $Q$  din plan, pentru care există un punct  $P \in \ell$  astfel încât  $AQ = PQ$  și  $\angle PAQ = 45^\circ$ .

**Problema 2.** Demonstrați că valoarea expresiei

$$\frac{\sqrt{n + \sqrt{0}} + \sqrt{n + \sqrt{1}} + \sqrt{n + \sqrt{2}} + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} + \sqrt{n + \sqrt{n^2}}}{\sqrt{n - \sqrt{0}} + \sqrt{n - \sqrt{1}} + \sqrt{n - \sqrt{2}} + \dots + \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}} + \sqrt{n - \sqrt{n^2}}}$$

este aceeași, oricare ar fi numărul natural nenul  $n$ .

**Problema 3.** Fiind date numerele reale  $a, b, c$ , diferite două câte două, demonstrați că inegalitatea (unde s-a folosit notația  $|x| = \sqrt{x^2}$ )

$$\left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \left| \frac{b+c}{b-c} \right| + \left| \frac{c+a}{c-a} \right| \geq 2$$

are loc, și determinați toate cazurile de egalitate.

Demonstrați că dacă impunem și condiția  $a, b, c \geq 0$ , atunci

$$\left| \frac{a+b}{a-b} \right| + \left| \frac{b+c}{b-c} \right| + \left| \frac{c+a}{c-a} \right| > 3,$$

valoarea 3 fiind cea mai bună constantă posibilă.

**Problema 4.** Fie  $X$  o mulțime cu  $|X| = n \geq 1$  elemente. O familie  $\mathcal{F}$  de submulțimi distincte ale lui  $X$  este zisă a avea proprietatea  $\mathcal{P}$  dacă există  $A, B \in \mathcal{F}$  astfel încât  $A \subset B$  și  $|B \setminus A| = 1$ .

i) Demonstrați că  $m = 2^{n-1}$  este cea mai mică valoare, astfel încât orice familie  $\mathcal{F}$  cu  $|\mathcal{F}| > m$  să aibă proprietatea  $\mathcal{P}$ .

ii) Găsiți toate familiile  $\mathcal{F}$  cu  $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$ , și care nu au proprietatea  $\mathcal{P}$ .

---

Orice cerere de clarificare poate fi făcută oricând pe parcursul probei. Este permisă folosirea calculatoarelor de buzunar. Timp de lucru  $4\frac{1}{2}$  ore.

Problemele nu sunt prezentate în mod necesar în ordinea dificultății - niciuna nu este trivială. Concizia și claritatea redactării vor fi luate în considerație. Încercați să nu folosiți mai mult de o coală de hârtie pentru fiecare problemă. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează **10** puncte.

★ ★ ★ **Mult SUCCES tuturor participanților!**