



Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SUBIECTE

1. Calculați integrala nedefinită $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

2. Determinați funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dacă

$$xf'(x) + 2f(x) + xF(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f .

3. a) Arătați că mulțimea de funcții

$F = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \right\}$ cu compunerea funcțiilor formează un monoid.

b) Determinați elementele continue ale mulțimii F .

4. a) Arătați că mulțimea $G = (2013, +\infty)$ cu operația $x \circ y = xy - 2013x - 2013y + 2013 \cdot 2014$, $\forall x, y \in G$, este grup izomorf cu grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .

b) Dacă H este un subgrup al grupului G și $G \cap \mathbb{N} \subset H$, arătați că $G \cap \mathbb{Q} \subset H$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 10 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.