MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI - BACĂU

COLEGIUL NAȚIONAL “FERDINAND I” – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică

“Vrănceanu – Procopiu”

Ediția a XIV –a, 2012

X

Problema I (10 puncte)

Determinați numerele întregi n pentru care numărul $\log_2\left(1+2^n\right)$ este rațional.

Cornel Berceanu, Bacău

Soluție.

Evident, $n=0$ este soluție a problemei. **(1p)**

Observăm că $\log_2\left(1+2^n\right)$ este număr strict pozitiv **(2p)**

şi să presupunem că ar fi rațional; atunci $\log_2\left(1+2^n\right)=\dfrac{p}{q}$, cu $p,q\in \mathbb{N}^*$. În cazul în care $n>0$, obținem că $\left(1+2^n\right)^q=2^p$. Cum numărul din stânga este impar, iar cel din dreapta este par, această egalitate este imposibilă. **(4p)**

În cazul în care $n=-m$, cu $m>0$, obținem că $\left(1+2^m\right)^q=2^{mq+p}$. Aceată egalitate este iarăşi imposibilă, tot din motive de paritate. Rămâne $n=0$ singura soluție a problemei. **(2p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Dacă a,b,c sunt numere reale strict pozitive, demonstrați că

$$\frac{a}{8a^2+5b^2+3c^2}+\frac{b}{3a^2+8b^2+5c^2}+\frac{c}{5a^2+3b^2+8c^2}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

Soluție.

Folosind inegalitatea mediilor se obține că $8a^2+5b^2+3c^2\ge 16a\sqrt[8]{b^5c^3}$, deci este suficient să demonstrăm că $\dfrac{1}{\sqrt[8]{b^5c^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[8]{c^5a^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5b^3}}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. **(5p)**

Cu substituțiile $\dfrac{1}{a}=x^8,\dfrac{1}{b}=y^8,\dfrac{1}{c}=z^8$, inegalitatea precedentă revine la $x^8+y^8+z^8\ge x^5y^3+y^5z^3+z^5x^3$, iar aceasta rezultă din $\underbrace{x^8+\dots+x^8}_{5\,termeni}+y^8+y^8+y^8\ge 8\sqrt[8]{x^{5\cdot 8}y^{3\cdot 8}}=8x^5y^3$ şi analoagele, prin sumare. **(4p)**