Problema I (10 puncte)

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se notează Tr($A$) = $a + d$, det(A) = $ad - bc$.

a) Determinați toate matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ pentru care există $x, y \in \mathbf{C}$, $x \neq$ Tr(A) sau $y \neq$ det(A), astfel încât $A^2 - xA + yI_2 = O_2$.

b) Dacă A este matrice determinată la a) diferită de matricea nulă şi de matricea unitate, determinați numerele complexe x şi y pentru care $A^2 - xA + yI_2 = O_2$ şi $A^4 - xA^2 + yI_2 = O_2$.

Adrian Troie, Bucureşti

Soluție.

a) Notăm t = Tr(A), d = det(A). Cum $A^2 - tA + dI_2 = O_2$, relația din ipoteză conduce la $(x - t)A = (d - y)I_2$. **(2p)**

Dacă $x - t = 0$, atunci $d - y = 0$, imposibil. Dacă $x - t \neq 0$, atunci $A = \dfrac{d-y}{x-t} I_2$, deci A este de forma αI_2. **(2p)**

Reciproc, dacă $A = \alpha I_2$, relația din ipoteză arată că $\alpha^2 - x\alpha + y = 0$. Avem t = Tr(A) = 2α, deci putem lua, de exemplu, $x = 2\alpha + 1 \neq t$, pentru care obținem $y = \alpha^2 + \alpha$. **(2p)**

b) Pentru $A = \alpha I_2$, calculând A^4 şi A^2, se obțin relațiile $\alpha^2 - x\alpha + y = 0$ şi $\alpha^4 - x\alpha^2 + y = 0$. Avem că $A \neq O_2$ şi $A \neq I_2$, deci $\alpha \neq 0, 1$. Soluțiile sistemului (pentru $\alpha \neq 0, 1$) sunt $x = \alpha^2 + \alpha$ şi $y = \alpha^3$. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Determinați limitele următoarelor şiruri:

a) $x_n = \dfrac{n^{n!}}{(n!)^n}$; **b)** $z_n = \dfrac{(n)^{\ln n}}{n!}$.

Adrian Troie, Bucureşti

Soluție.

a) Observăm că $\ln x_n = n!\ln n - n\ln(n!) = (n!)\cdot(\ln n - \dfrac{\ln(n!)}{(n-1)!})$. **(2p)**

Notăm $y_n = \dfrac{\ln(n!)}{(n-1)!}$. Aplicând Lema Stolz – Cesaro, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln((n+1)!) - \ln(n!)}{n! - (n-1)!} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{(n-1)!(n-1)} = 0$, **(2p)** de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \propto$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \propto$. **(1p)**

b) Avem că $\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)^{\ln(n+1)}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n)^{\ln n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln n}\cdot(n+1)^{\ln(n+1)-\ln n-1}$. **(1p)**

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^{0} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\ln(n+1)-\ln n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{1-\ln\frac{n+1}{n}}} = 0$, **(2p)**

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n} = 0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. **(1p)**