Problema I (10 puncte)

Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ admite primitive şi determinați o primitivă a sa.

***

Soluție.

Cum $\dfrac{2x}{1+x^2}\in\left[-1,1\right],\forall x\in\mathbb{R}$, funcția *f* este bine definită şi se poate scrie ca o compunere de două funcții continue. Rezultă că *f* este continuă, deci admite primitive. **(2p)**

Pentru determinarea primitivelor, folosim metoda integrării prin părți. Avem că $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{1+x^2}\cdot\dfrac{1-x^2}{\left|1-x^2\right|}$, deci trebuie considerate separat intervalele $\left(-\infty,-1\right),\left(-1,1\right)$ şi $\left(1,\infty\right)$. **(2p)**

Pentru $x\in\left(1,\infty\right)$, $\int\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}dx=x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\int\dfrac{2x}{1+x^2}dx=x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\ln\left(1+x^2\right)+C$ şi analog se procedează pe celelalte două intervale. Obținem că o primitivă a lui *f* are forma

$$F\left(x\right)=\begin{cases}x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\ln\left(1+x^2\right), & x\in\left(-\infty,-1\right)\\ x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-\ln\left(1+x^2\right)+C_1, & x\in\left[-1,1\right)\\ x\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}+\ln\left(1+x^2\right)+C_2, & x\in\left[1,\infty\right)\end{cases}.\ \textbf{(3p)}$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiția de continuitate a lui *F*, obținând $C_1=2\ln 2$ şi $C_2=0$. **(2p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Fie G un grup de ordin $n, n\geq 4$, cu proprietatea că există $m\in\mathbb{N}, 1<m<n$, astfel încât G conține exact C_{n-1}^{m-1} subgrupuri de ordin m. Demonstrați că grupul G este abelian.

Marius Tărnăuceanu, Iaşi

Soluție.

Considerăm submulțimile lui G care conțin elementul neutru e şi încă $m-1$ elemente din $G\setminus\{e\}$. Numărul acestor submulțimi este C_{n-1}^{m-1}, deci toate aceste submulțimi sunt subgrupuri ale lui *G*. **(3p)**

Dacă, prin absurd, $m>2$, fie $x,y\in G\setminus\{e\}, x\neq y$; cum $n-3\geq m-2\geq 1$, putem alege $m-2$ elemente distincte din $G\setminus\{e\}$, fie acestea $a_1,a_2,...,a_{m-2}$. Notăm $H_1=\{e,x,a_1,a_2,...,a_{m-2}\}$ şi $H_2=\{e,y,a_1,a_2,...,a_{m-2}\}$. Avem că $xa_1\in H_1$

(deoarece H_1 este sugrup), $xa_1 \neq e$ (altfel $x = a_1^{-1} \in H_2$), $xa_1 \neq x$ (în caz contrar, $a_1 = e$) şi $xa_1 \neq a_i, i = \overline{2, m-2}$ (altfel $x = a_i a_1^{-1} \in H_2$). **(3p)**

Contradicția la care am ajuns arată că $m = 2$, deci $a^2 = e, \forall a \in G$. Această condiție conduce la comutativitatea lui G. **(3p)**