

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI  
SPORTULUI



INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI - BACĂU  
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică  
"Vrănceanu – Procopiu"

Ediția a XIV –a, 2012

IX

*Problema I (10 puncte)*

Determinați numerele naturale nenule  $n$  pentru care  $N = \left\lfloor \frac{n^3 + 8n^2 + 1}{3n} \right\rfloor$  este număr prim. (Prin  $\lfloor x \rfloor$  înțelegem partea întreagă a numărului real  $x$ .)

*Gabriel Popa, Iași*

**Soluție.**

Dacă  $n = 3k$ , avem că  $N = k(3k + 8)$ , care este prim doar pentru  $k = 1$ ; obținem soluția  $n = 3$ . **(3p)**

Dacă  $n = 3k + 1$ , avem că  $N = (k + 3)(3k + 1)$ , care este prim doar pentru  $k = 0$ ; obținem soluția  $n = 1$ . **(3p)**

Dacă  $n = 3k + 2$ , avem că  $N = 3(k^2 + 4k + 2)$ , care este compus pentru orice  $k \in \mathbb{N}$ . În concluzie,  $n \in \{1, 3\}$ . **(3p)**

*Problema a II-a (10 puncte)*

Fie  $a, b, c$  lungimile laturilor triunghiului  $ABC$  și  $G$  centrul său de greutate. Notăm cu  $D, E, F$  punctele de contact ale cercului înscris în triunghi cu laturile  $BC, CA$ , respectiv  $AB$ . Demonstrați că  $a\overrightarrow{GD} + b\overrightarrow{GE} + c\overrightarrow{GF} = \vec{0}$  dacă și numai dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral.

*Marian Ursărescu, Roman*

**Soluție.**

Implicația inversă revine la binecunoscuta  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ . **(3p)**

Presupunem acum că  $a\overrightarrow{GD} + b\overrightarrow{GE} + c\overrightarrow{GF} = \vec{0}$  și să arătăm că  $a = b = c$ . Cum  $\frac{DB}{DC} = \frac{p-b}{p-c}$ , obținem că

$$a\overrightarrow{GD} = (p-c)\overrightarrow{GB} + (p-b)\overrightarrow{GC}. \quad \text{(3p)}$$

Scriem încă două relații similare și le sumăm; rezultă că  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ , prin urmare  $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} - c(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$ , de unde  $(a-c)\overrightarrow{GA} + (b-c)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ . Cum vectorii  $\overrightarrow{GA}$  și  $\overrightarrow{GB}$  sunt necoliniari, deducem că  $a-c = b-c = 0$ , deci  $a = b = c$ . **(3p)**

