Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a V-a

Problema 1. Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relaţia

$$b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie M mulţimea numerelor palindrom de forma $5n+4$, unde $n \in \mathbb{N}$. (Un număr natural se numeşte *palindrom* dacă este egal cu răsturnatul său. De exemplu, numerele 7, 191, 23532, 3770773 sunt numere palindrom.)

a) Dacă scriem în ordine crescătoare elementele mulţimii M, stabiliţi care este al 50-lea număr scris.

b) Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare dintre elementele mulţimii M care se scriu cu cifre nenule şi au suma cifrelor 2014.

Problema 3. Se consideră mulţimea $A = \{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{2014}\}$. Spunem că se realizează o *partiţie* a lui A dacă mulţimea A este scrisă ca o reuniune de submulţimi nevide ale sale, disjuncte două câte două.

a) Demonstraţi că nu există o partiţie a lui A astfel încât produsul elementelor fiecărei submulţimi din partiţie să fie pătrat perfect.

b) Arătaţi că există o partiţie a lui A astfel încât suma elementelor fiecărei submulţimi din partiţie să fie pătrat perfect.

Problema 4. Un număr natural de 10 cifre se numeşte *dichisit* dacă cifrele sale aparţin mulţimii $\{1, 2, 3\}$ şi oricare două cifre consecutive diferă prin 1.

a) Arătaţi că un număr dichisit conţine în scrierea sa exact cinci cifre de 2.

b) Stabiliţi câte numere dichisite există.

c) Demonstraţi că suma tuturor numerelor dichisite se divide cu 1408.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.