Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a VI-a

Problema 1. Arătaţi că:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1$;

b) $3^{33} + 4^{33} + 5^{33} < 6^{33}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Spunem că mulţimea nevidă M de cardinal n are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă elementele sale sunt numere naturale care au exact 4 divizori. Notăm cu S_M suma tuturor celor $4n$ divizori ai elementelor lui M (suma poate conţine termeni care se repetă).

a) Arătaţi că $A = \{2 \cdot 37, 19 \cdot 37, 29 \cdot 37\}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $S_A = 2014$.

b) În cazul în care o mulţime B are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $8 \in B$, demonstraţi că $S_B \neq 2014$.

Problema 3. Pe laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N respectiv P astfel încât $BM = BP$ şi $CM{=}CN$. Perpendiculara din B pe MP şi perpendiculara din C pe MN se intersectează în I. Demonstraţi că unghiurile $\widehat{IPA}$ şi $\widehat{INC}$ sunt congruente.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale a pentru care există exact 2014 numere naturale b care verifică relaţia $2 \leq \frac{a}{b} \leq 5$.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.