Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a VIII-a

Problema 1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\sqrt{3}$ cm şi $AA' = 18$ cm, se consideră punctele $P \in [AA']$ şi $N \in [A'B']$ astfel încât $A'N = 3B'N$.

Determinaţi lungimea segmentului $[AP]$ astfel încât, pentru orice punct $M \in [BC]$, triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

Gazeta Matematică

Problema 2. Pentru fiecare număr natural nenul a se notează cu $p(a)$ cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu a.

a) Determinaţi numărul perechilor de numere naturale nenule (m, n), cu $m \leq n$, pentru care

$$p(2m-1) \cdot p(2n-1) = 400.$$

b) Determinaţi mulţimea $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, n \leq 100 \text{ şi } \dfrac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N} \right\}$.

Problema 3. În vârful A al hexagonului regulat $ABCDEF$ de latură a se ridică perpendiculara $AS = 2a\sqrt{3}$ pe planul hexagonului. Punctele M, N, P, Q, respectiv R sunt proiecţiile punctului A pe dreptele SB, SC, SD, SE, respectiv SF.

a) Demonstraţi că punctele M, N, P, Q, R sunt coplanare.

b) Determinaţi măsura unghiului format de planele (MNP) şi (ABC).

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi mulţimea valorilor pe care le poate lua suma

$$S = [x_2 - x_1] + [x_3 - x_2] + ... + [x_n - x_{n-1}],$$

unde x_1, x_2, ..., x_n sunt numere reale cu partea întreagă 1, 2, ..., n.

Prin $[x]$ se notează partea întregă a numărului real x.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.