MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică

08.03.2014

Clasa a IX-a

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile :

a) $|x+3|=|5-x|$;

b) $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\frac{x+2}{4}$.

($[y]$ reprezintă partea întreagă lui y)

R.M.C. Nr.1/2013-2014

2. Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $x + y + z = 1$. Arătați că:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \in [2,\ 3\ ).$$

Prof. Luminița Popescu, Craiova

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin:
$a_1 = 3, a_2 = 5$ și $a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - 3 \cdot a_n$, $(\forall)\ n \geq 1$.

a) Determinați șirul a_n.

b) Arătați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin $b_n = a_{n+2} - 2 \cdot a_{n+1} + a_n$ este o progresie geometrică.

Prof. Ionel Prejbeanu, Craiova

4. a) Fie $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trei vectori nenuli astfel încât $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ şi $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$ să fie coliniari. Arătaţi că $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt vectori coliniari.

* * *

b) Se dă triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât

$$\overrightarrow{AD}=n\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}, \text{ iar } \overrightarrow{CE}=\frac{n}{n+1}\overrightarrow{CB}.$$

Să se demonstreze că punctele A, D, E sunt coliniare.

Prof. Dan Secleman, Craiova

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.

Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a IX-a:

1. a) $|x+3|=|5-x| \Leftrightarrow x+3=5-x$ sau $x+3=x-5 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$.

b) Impunem condiţia: $\frac{x+2}{4} \Leftrightarrow x \in A=\{4k-2|k \in \mathbb{Z}\}$. Avem:

$\frac{x-1}{2}-1<\left[\frac{x-1}{2}\right] \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}-1<\frac{x+2}{4} \leq \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 2x-6<x+2 \leq 2x-2 \Leftrightarrow$ $x \in[4,8)$.

Atunci: $x \in A \cap[4,8)=\{6\}$.

2. Avem:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}<\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}=3 \ (1) \ .$$

Folosind inegalitatea mediilor, avem:

$$\sqrt{(x+2y+3z) \cdot 1} \leq \frac{x+2y+3z+1}{2},$$

$$\sqrt{(2x+3y+z) \cdot 1} \leq \frac{2x+3y+z+1}{2},$$

$$\sqrt{(3x+y+2z) \cdot 1} \leq \frac{3x+y+2z+1}{2}.$$

Deci: $\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \geq$

$$\geq 2\left(\frac{1}{x+2y+3z+1}+\frac{1}{2x+3y+z+1}+\frac{1}{3x+y+2z+1}\right)(*).$$

Folosind: $(a+b+c) \cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3^2$, $(\forall)\ a, b, c>0\ (**)$, deducem

$$2\left(\frac{1}{x+2y+3z+1}+\frac{1}{2x+3y+z+1}+\frac{1}{3x+y+2z+1}\right) \geq$$

$$\geq 2 \cdot \frac{9}{(x+2y+3z+1)+(2x+3y+z+1)+(3x+y+2z+1)}=$$

$$=2 \cdot \frac{9}{6(x+y+z)+3}=\frac{18}{6+3}=2.$$

În concluzie: $\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}} \geq 2\ (2)$.

Din (1), (2) rezultă concluzia:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}\ \in [2,\ 3\,).$$

3. a) Metoda I:

Aplicăm metoda inductivă pentru a determina expresia lui a_n.

Metoda II:

Recurență liniară de ordinul doi, omogenă, cu coeficienți constanți.

Expresia lui a_n este: $a_n = 3^{n-1} + 2$.

b) Folosind punctul **a)** obținem: $b_n = a_{n+2} - 2 \cdot a_{n+1} + a_n = (3^{n+1} + 2) - 2 \cdot (3^n + 2) + (3^{n-1} + 2) = 4 \cdot 3^{n-1}$. Un șir cu termeni pozitivi este progresie geometrică dacă $(b_{k+1})^2 = b_k \cdot b_{k+2},\ k \geq 1$. În cazul exercițiului din enunț:

$(b_{k+1})^2 = (4 \cdot 3^k)^2 = (4 \cdot 3^{k-1}) \cdot (4 \cdot 3^{k+1}) = b_k \cdot b_{k+2},\ k \geq 1$, deci șirul este o progresie geometrică.

4. a) Fie $\vec{u}$ vectorul coliniar cu $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ şi $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$.

Atunci $(\exists)\ m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\vec{a}+\vec{b}=m\vec{u},\quad \vec{a}-\vec{b}=n\vec{u} \text{ şi } \vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=p\vec{u}.$$

De aici rezultă:

$$\vec{a}=\frac{m+n}{2}\cdot\vec{u},\quad \vec{b}=\frac{m-n}{2}\cdot\vec{u},\quad \vec{c}=\frac{2p-3m+n}{6}\cdot\vec{u}.$$

b) A, D, E sunt coliniare $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{ED}$.

Cum

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\frac{n}{n+1}\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+\frac{n}{n+1}\overrightarrow{CB}=$$
$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{BC}.$$

Dar

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE})=n\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AC}+\frac{n}{n+1}\overrightarrow{CB})=n\overrightarrow{AB}+\frac{n}{n+1}\overrightarrow{BC}$$
$$=n(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{BC})=n\overrightarrow{AE}.$$

Deci A, D, E sunt coliniare.

Barem de corectare

Clasa a IX-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
a) $\lvert x+3\rvert=\lvert 5-x\rvert \Leftrightarrow x+3=5-x$ sau $x+3=x-5$	2p
Finalizare: $x=1$.	1 p
b) $\frac{x+2}{4} \in \mathbb{Z}$	2p
$\frac{x-1}{2}-1<\left[\frac{x-1}{2}\right]\le\frac{x-1}{2}$	3p
Finalizare: $x=6$	1 p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
Obținerea inegalității: $\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}<$ $<\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}+\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}=3\ (1)$	3 p
Folosirea inegalității mediilor	1 p
Obținerea inegalității: $\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}\ge$ $\ge 2\left(\frac{1}{x+2y+3z+1}+\frac{1}{2x+3y+z+1}+\frac{1}{3x+y+2z+1}\right)(*).$	2 p
Folosirea inegalității: $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3^2,\ (\forall)\ a,b,c>0\ (**),$	1 p
Obținerea inegalității: $\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}\ge 2\ (2)$	1 p
Finalizare	1 p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu**	**1 p**
$\boldsymbol{a}$) Determinarea expresiei lui a_n: $a_n = 3^{n-1} + 2$.		5 p
b) Derminarea lui b_n: $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$		2 p
Finalizare		2p
TOTAL		**10p**

Problema 4	**Oficiu**	**1 p**
a) $\vec{u}$ vectorul coliniar cu $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ şi $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$		1p
$(\exists) m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\vec{a}+\vec{b}=m\vec{u}$, $\vec{a}-\vec{b}=n\vec{u}$ şi $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=p\vec{u}$.		1 p
Finalizare: $\vec{a}=\frac{m+n}{2}\cdot\vec{u}$, $\vec{b}=\frac{m-n}{2}\cdot\vec{u}$, $\vec{c}=\frac{2p-3m+n}{6}\cdot\vec{u}$		2 p
b) Condiția de coliniaritate: $(\exists)\ \lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{ED}$.		1p
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{BC}$		2p
$\overrightarrow{ED}=n(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{BC})=n\overrightarrow{AE}.$		2p
TOTAL		**10p**