Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014
CLASA a IX-a

Problema 1. Să se determine numărul iraţional x ştiind că numerele x^2+x şi x^3+2x^2 sunt numere întregi.

prelucrare din Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel încât

$$\frac{DB}{DC}=\frac{EC}{EA}=\frac{FA}{FB}.$$

Semidreptele $(AD$, $(BE$ şi $(CF$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, N şi P. Să se arate că triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiurile BMC, CNA şi APB au ariile egale.

Problema 3. Medianele AD, BE şi CF ale triunghiului ABC se intersectează în punctul G. Fie P un punct în interiorul triunghiului, nesituat pe niciuna dintre medianele acestuia. Dreapta care trece prin P şi este paralelă cu AD intersectează latura BC în punctul A_1. În mod analog se definesc punctele B_1 şi C_1. Să se arate că

$$\overline{A_1D}+\overline{B_1E}+\overline{C_1F}=\frac{3}{2}\overline{PG}.$$

Problema 4. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ cu proprietăţile:
a) $f(m+n)-1$ divide $f(m)+f(n)$, pentru orice $m,n\in\mathbb{N}^*$;
b) $n^2-f(n)$ este pătrat perfect, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.