

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -****CLASA A IX-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.  
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. a) O progresie aritmetică de rație pozitivă conține numerele 14, 26, 42. Să se arate că numărul 2014 este termen al progresiei.

b) Fie  $(b_n)_{n \geq 1}$  o progresie geometrică având termenii pozitivi. Să se arate că

$$(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2014})(b_1 + b_{2014}) \geq 4028b_1 b_{2014}.$$

2. În triunghiul  $ABC$  se notează cu  $M, N$ , respectiv  $P$  punctele de tangență ale cercului înscris în acesta cu laturile  $(BC), (CA)$ , respectiv  $(AB)$ .

a) Să se arate că  $2\overline{AM} = (a+b-c)\overline{AB} + (a+c-b)\overline{AC}$ .

b) Să se arate că  $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$  dacă și numai dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral.

3. a) Să se arate că, dacă  $\alpha > 0$ , atunci valoarea maximă a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha} \text{ este } \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

b) Să se arate că, dacă  $a, b, c$  sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ac} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

4. Se numerotează vârfurile unui cub  $ABCDEFGH$  cu câte un număr natural de la 1 la 8, astfel încât oricăror două vârfuri distincte să li se atribuie numere diferite.

a) Se atribuie fiecărei fețe numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Să se arate că există patru fețe cu suma numerelor atribuite egală cu 72.

b) Se atribuie fiecărei muchii numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Există o numerotare a vârfurilor pentru care numerele atribuite muchiilor sunt distincte două câte două? Justificați răspunsul!



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
- ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A IX-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiect 1**, prelucrare *Ovidiu Șontea*

a) O progresie aritmetică de rație pozitivă conține numerele 14, 26, 42. Să se arate că numărul 2014 este termen al progresiei.

b) Fie  $(b_n)_{n \geq 1}$  o progresie geometrică având termenii pozitivi. Să se arate că

$$(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2014})(b_1 + b_{2014}) \geq 4028b_1 b_{2014}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $26 - 14 = 12 = mr$ , $42 - 26 = 16 = nr$ , deci $4 = (n - m)r$ , cu $n - m = p$ natural $2014 = 14 + 500 \cdot 4 = 14 + 500pr$ aparține progresiei	2p 2p
b) După împărțire cu $b_1^2$ , inegalitatea devine $(1 + q + \dots + q^{2013})(1 + q^{2013}) \geq 4028q^{2013}$	1p
Ea rezultă prin adunarea inegalităților $1 + q^{4026} \geq 2q^{2013}$ , $q + q^{4025} \geq 2q^{2013}$ , etc	2p

**Subiect 2**, autor \*\*\*

În triunghiul  $ABC$  se notează cu  $M, N$ , respectiv  $P$  punctele de tangență ale cercului înscris în acesta cu laturile  $(BC), (CA)$ , respectiv  $(AB)$ .

a) Să se arate că  $2a\overrightarrow{AM} = (a + b - c)\overrightarrow{AB} + (a + c - b)\overrightarrow{AC}$ .

b) Să se arate că  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$  dacă și numai dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\overrightarrow{AM} = (MC / BC)\overrightarrow{AB} + (MB / BC)\overrightarrow{AC}$ $MB = p - b$ , $MC = p - c$ , de unde concluzia	1p 2p
b) Dacă $a = b = c$ , atunci $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 1/2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$	1p
Din a), $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}((b - c) / a + (b - a) / c)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}((c - b) / a + (c - a) / b)\overrightarrow{AC}$	2p
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ implică $ab + bc = a^2 + c^2$ și $ac + bc = a^2 + b^2$ , de unde $a = b = c$	1p

**Subiect 3**, autor *Marian Cucoaneș* – Supliment GM 11/2013

a) Să se arate că, dacă  $\alpha > 0$ , atunci valoarea maximă a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată de

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha} \text{ este } \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

b) Să se arate că, dacă  $a, b, c$  sunt numere reale pozitive, atunci

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ac} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $f(x) \leq 1/(2\sqrt{\alpha}) \Leftrightarrow (x - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0$ , cu egalitate pentru $x = \sqrt{\alpha}$	3p
b) Conform a), este suficient să arătăm că $\sum 1/\sqrt{ab} \leq \sum 1/a$	2p
Notând $x = 1/\sqrt{a}$ și analogele, aceasta se reduce la $\sum xy \leq \sum x^2$ – inegalitate cunoscută	2p

**Subiect 4**, autori *Ovidiu Șontea* și *Mihail Bălună*

Se numerotează vârfurile unui cub  $ABCDEFGH$  cu câte un număr natural de la 1 la 8, astfel încât oricărui două vârfuri distincte să li se atribuie numere diferite.

a) Se atribuie fiecărei fețe numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Să se arate că există patru fețe cu suma numerelor atribuite egală cu 72.

b) Se atribuie fiecărei muchii numărul egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină. Există o numerotare a vârfurilor pentru care numerele atribuite muchiilor sunt distincte două câte două? Justificați răspunsul!

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Suma numerelor de pe două fețe opuse este suma tuturor numerelor folosite, adică 36	2p
Cu două perechi de fețe opuse obținem patru fețe cu suma numerelor atribuite egală cu 72	1p
b) Suma numerelor atribuite muchiilor este $3(1 + 2 + \dots + 8) = 108$	1p
Dacă muchiile au numere diferite, atunci ele trebuie să fie 12 numere dintre 3, 4, ..., 15. Cum $3 + 4 + \dots + 15 = 117$ , trebuie ca numerele muchiilor să fie 3, 4, ..., 8, 10, 11, ..., 15	1p
În acest caz, trebuie să existe simultan muchiile 87, 86, (85 sau 76) și (75 sau 84), ceea ce este imposibil	2p