



INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

CLASA A XI - A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. a) Este adevărată afirmația : „dacă un șir de numere naturale este nemărginit atunci el are limita $+\infty$ ”? Justificați răspunsul !

b) Determinați toate funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$f^2(x) - 2f(x) = x^2 - 2x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

2. Determinați numerele reale $a \geq 0$ și b pentru care

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - x \right)^{\frac{bx^2 + x}{x+1}} = e.$$

3. Determinați matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care au proprietatea $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

4. Fie A și B matrice 2×2 cu elemente întregi, astfel încât matricele $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A+4B$ și $A+5B$ să fie inversabile, iar inversele lor să aibă elemente întregi. Să se arate că matricea $A+6B$ este inversabilă, iar inversa ei are elemente întregi.



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
- ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A XI-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Enunț subiect 1, autor***

a) Este adevărată afirmația : „dacă un șir de numere naturale este nemărginit atunci el are limita $+\infty$ ”? Justificați răspunsul !

b) Determinați toate funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$f^2(x) - 2f(x) = x^2 - 2x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Nu, de exemplu $x_n = n(1 + (-1)^n)$.	3p
b) Avem $f(x) = 1 \pm (x-1)$, deci $f(x) \in \{x, 2-x\}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$	1p
Dacă există $x_1, x_2 > 1$ astfel încât $f(x_1) = x_1$ și $f(x_2) = 2 - x_2$, atunci $f(x_1) > 1$, $f(x_2) < 1$ și nu există x între x_1 și x_2 astfel încât $f(x) = 1$, ceea ce contrazice faptul că funcția are proprietatea lui Darboux	1p
Astfel $f(x) = x$ pentru orice $x \geq 1$, sau $f(x) = 2 - x$ pentru orice $x \geq 1$; are loc un rezultat analog pentru $x < 1$	1p
Obținem patru funcții: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x - 1 , \forall x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = 1 + x - 1 , \forall x \in \mathbb{R}$	1p

Enunț subiect 2, autor***

Determinați numerele reale $a \geq 1$ și b pentru care $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax - x} \right)^{\frac{bx^2+x}{x+1}} = e$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax - x} \right) = \frac{a}{2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2+x}{x+1} = \begin{cases} 1, & b=0 \\ \pm\infty, & b \neq 0 \end{cases}$	4p
Dacă $a \neq 2$, limita cerută este e pentru $b = 0$ și $a = 2e$	1p
Dacă $a = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - x} \right)^{\frac{bx^2+x}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \sqrt{x^2 + 2x - x - 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - x - 1}}} \right]^{\frac{bx^2+x}{(x+1)(\sqrt{x^2 + 2x - x - 1})}}$ este e pentru $b = -2$	2p

Enunț subiect 3, autor *Daniela Haret*

Determinați matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ care au proprietatea $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$(\det(A))^3 = \det(A^3) = 1$, deci $\det A = 1$	2p
Dacă t este urma lui A , atunci $A^2 = tA - I_2$	1p
Rezultă $A^3 = tA^2 - A = (t^2 - 1)A - tI_2$	1p
Deoarece A are elemente întregi, deducem $t^2 - 1 \mid 8$ și $t \in \mathbb{Z}$, deci $t = 0$ sau $t = \pm 3$	1p
Pentru $t \in \{-3, 0\}$ nu obținem soluții, iar pentru $t = 3$ obținem $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, care convine	2p

Enunț subiect 4, autor ***

Fie A și B matrice 2×2 cu elemente întregi, astfel încât matricele $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$, $A + 4B$ și $A + 5B$ să fie inversabile, iar inversele lor să aibă elemente întregi. Să se arate că matricea $A + 6B$ este inversabilă, iar inversa ei are elemente întregi.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă o matrice M și inversa ei au elemente întregi, atunci $(\det M)(\det M^{-1}) = 1$ implică $\det M = \pm 1$	2p
Astfel, ipoteza spune că pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A + Bx)$, una din ecuațiile $f(x) = 1$ sau $f(x) = -1$ are cel puțin trei soluții; cum aceste funcții sunt polinomiale de grad cel mult doi, rezultă că una dintre funcții este constantă	3p
Folosind această funcție, deducem că $\det(A + 6B) = \pm 1$, de unde concluzia	2p