MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică

08.03.2014

Clasa a X-a

1. a) Arătaţi că $z-\overline{z}=2i\cdot\operatorname{Im} z$, $(\forall)\, z\in\mathbb{C}$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z, iar $\operatorname{Im} z$ este coeficientul părții imaginare a lui z.

b) Dacă $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ cu $ad-bc=1$, arătaţi că:

$$\operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2},\ (\forall)\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

* * *

2. Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_3(3^x-1)-\log_2(2^x+1)$.

a) Determinaţi mulţimea: $A=\{x>0 \mid f(x)=0\}$;

b) Arătaţi că $f(1)<0$;

c) Determinaţi mulţimea: $B=\{x>0 | f(x)<0\}$

Prof. Dan Secleman, Craiova

3. Să se arate că:

$$-\frac{1}{4}\le \sin x\cdot(1+\cos x)+\cos x\cdot(1+\sin x)+1\le\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right),$$
$(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

Prof. Ani Drăghici, Craiova

4. Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ cu proprietățile:

a) f este o funcție strict crescătoare;

b) $f(1)\cdot f(-1)=1$;

c) $\ln f\left(\frac{n}{m}\right)=n\cdot\ln f\left(\frac{1}{m}\right), (\forall)n\in\mathbb{N}, (\forall)m\in\mathbb{Z}^*$.

Să se determine funcția f.

Prof. Cristian Moanță, Craiova

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.

Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a X-a:

1. a) $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z} = x - iy$, $\operatorname{Im} z = y$.
Deci: $z - \overline{z} = 2iy = 2i \cdot \operatorname{Im} z$.

b) Ţinând cont de a), avem: $\operatorname{Im} z = \frac{i}{2}(\overline{z} - z)$ şi atunci:

$$\operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{i}{2}\left(\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} - \frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{i}{2}\cdot\frac{(ad-bc)\cdot(\overline{z}-z)}{(cz+d)\left(\overline{cz+d}\right)} = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}.$$

2. a) $x \in A \Leftrightarrow x > 0$ şi $\log_3(3^x - 1) = \log_2(2^x + 1)$ (1)
Notând cu t valoarea comună din (1), obţinem:
$3^x - 1 = 3^t$ şi $2^x + 1 = 2^t$, de unde: $3^x + 2^x = 3^t + 2^t$; (*)
Cum funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 3^y + 2^y$ este strict crescătoare, deducem că g este injectivă şi atunci din (*) rezultă $t = x$.
Deci $3^x - 1 = 3^x$ şi $2^x + 1 = 2^x$, ecuaţii ce nu au soluţii. Obţinem $A = \varnothing$.

b) $f(1) < 0 \Leftrightarrow f(1) = \log_3 2 - \log_2 3 < 0$ deoarece
$$\log_3 2 < 1 < \log_2 3.$$

c) Conform cu a), avem $f(x) \neq 0$, $(\forall) x > 0$ şi, ţinând cont de b), obţinem: $f(x) < 0$, $(\forall) x > 0$. Deci $B = (0, \infty)$.

3. Notăm expresia: $E(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x) + \cos x \cdot (1 + \sin x) + 1 =$
$= \sin x + \cos x + 2\sin x \cdot \cos x + 1 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x + 1$. Cum
$\sin y \in [-1, 1]$, $(\forall)\ y \in \mathbb{R}$, obținem:
$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x + 1 \leq \sqrt{2} + 1 + 1 = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.
Deoarece:
$E(x) = \sin x + \cos x + 2\sin x \cdot \cos x + 1 = \sin x + \cos x + 2\sin x \cdot \cos x + (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 + \sin x + \cos x =$
$$= \left(\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}, (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$
În concluzie:
$$-\frac{1}{4} \leq \sin x \cdot (1 + \cos x) + \cos x \cdot (1 + \sin x) + 1 \leq \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right),$$
$(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

4. Proprietatea c) se mai scrie: $f\left(\frac{n}{m}\right) = f^n\left(\frac{1}{m}\right)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ m \in \mathbb{Z}^*$.

- Fie $n = 0, m = 1 \Rightarrow f(0) = f^0(1)$, iar din b) concluzionăm: $f(1) \neq 0$, rezultă $f(0) = 1$. Notăm $f(1) = a$ (1). Din condiția b) avem

$a \cdot f(-1) = 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{a}$ (2).

Funcția f fiind strict crescătoare, iar $1 > 0 \Rightarrow f(1) > f(0)$, adică $a > 1$ (3).

- Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m = n$, atunci $f\left(\frac{n}{n}\right) = f^n\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow$

  $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ (4).

- Dacă $m = -n,\ n \in \mathbb{N}^*$ avem

  $f\left(\frac{n}{-n}\right) = f^n\left(\frac{1}{-n}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{-\frac{1}{n}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ (5).

- Din (4), (5) obținem $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{Z}^*$ (6). Deci

  $f\left(\frac{n}{m}\right) = f^n\left(\frac{1}{m}\right) = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = a^{\frac{n}{m}}$, $(\forall)\ m,\ n \in \mathbb{Z}^*$ (7).

  Deci $f(x) = a^x, (\forall)\ x \in \mathbb{Q}$ (8).

- Arătăm că $f(x) = a^x, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Presupunem că $(\exists)\ x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ cu proprietatea $f(x_0) \neq a^{x_0}$.

I. Presupunem că $f(x_0) > a^{x_0}$. Cum $f(x_0) > 0$, iar funcția $h: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $h(x) = a^x$, $a > 1$ este bijectivă $\Rightarrow (\exists)\ x_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^{x_1} = f(x_0) > a^{x_0}$, deci $a^{x_1} > a^{x_0} \Rightarrow x_1 > x_0$.

Fie $c \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x_0 < c < x_1$, iar funcția h strict crescătoare, rezultă $a^c < a^{x_1} = f(x_0) \Rightarrow a^c < f(x_0)$. Dar $c \in \mathbb{Q}$ și $f(c) = a^c, \Rightarrow f(c) < f(x_0)$ iar f este strict crescătoare, rezultă $c < x_0$ fals, deoarece s-a considerat $x_0 < c$. Deci $f(x_0) \leq a^{x_0}$ (*).

II. Presupunem că $f(x_0) < a^{x_0}$ și repetând raționamentul de mai sus (I), se obține că $f(x_0) \geq a^{x_0}$ (**).

Din (*), (**) se obține $f(x_0) = a^{x_0}$, $(\forall)\ x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (9), iar din relațiile (8), (9) concluzionăm că funcția căutată este $f(x) = a^x, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Barem de corectare

Clasa a X-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
a) $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$	1 p
$\overline{z} = x - iy,\ \operatorname{Im} z = y$	2 p
Finalizare: $z - \overline{z} = 2iy = 2i \cdot \operatorname{Im} z$	1 p
b) $\operatorname{Im} z = \frac{i}{2}(\overline{z} - z)$	1p
$\operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{i}{2}\left(\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} - \frac{az+b}{cz+d}\right)$	2p
$\frac{i}{2} \cdot \frac{(ad-bc)\cdot(\overline{z}-z)}{(cz+d)\left(\overline{cz+d}\right)} = \frac{\operatorname{Im} z}{\lvert cz+d\rvert^2}$	2p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
a) $x \in A \Leftrightarrow x > 0$ şi $\log_3(3^x - 1) = \log_2(2^x + 1)$	1 p
Obținerea relației : $3^x + 2^x = 3^t + 2^t$	1 p
Obținerea: $t = x$	1p
Finalizare	1p
b) $f(1) = \log_3 2 - \log_2 3 < 0$	1p
$\log_3 2 < 1 < \log_2 3.$	1p
c) $f(x) \neq 0,\ (\forall) x > 0$	1p
Finalizare	2 p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
Obținerea expresiei: $E(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x + 1$	2 p
$E(x) \leq \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right), (\forall)\ x \in \mathbb{R}$	2 p
Obținerea expresiei: $E(x) = (\sin x + \cos x)^2 + \sin x + \cos x$	2p
$E(x) = \left(\sin x + \cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}, \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$	2 p
Finalizare	1 p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
$f\left(\frac{n}{m}\right) = f^n\left(\frac{1}{m}\right)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}, (\forall)\ m \in \mathbb{Z}^*$ 1p	
$n = 0, m = 1$, concluzie $a > 1$ (3)	1p
$m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m = n$, concluzie $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ (4)	1p
$m = -n,\ n \in \mathbb{N}^*$, concluzie $f(x) = a^x, (\forall)\ x \in \mathbb{Q}$	1p
$f(x_0) \leq a^{x_0}$ (*)	2p
$f(x_0) \geq a^{x_0}$ (**)	2p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**