MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014

CLASA a X -a

PROBLEMA 1. Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_{2014} \in (0, \infty)$ si functia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_1^x + a_2^x + ... + a_{2014}^x$. Daca $f(2014) = f(-2014) = 2014,$ aratati ca functia f este constanta.

PROBLEMA 2.a)Aratati ca $x^2 + y^2 \geq 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

b)Demonstrati ca daca $a, b, c \in (0,1)$ atunci are loc inegalitatea

$$\log_a \frac{4b}{b+4} + \log_b \frac{4c}{c+4} + \log_c \frac{4a}{a+4} \geq \frac{3}{2}.$$

Dragos Constantinescu

PROBLEMA 3.Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ si multimea $A = \{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1]\}$.

a)Aratati ca $\forall w \in A$ are loc inegalitatea $|z_1 + z_2 + z_3 - w| + |w| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

b)Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ si orice $a_1, a_2, .., a_n \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ si orice $w_1, w_2, ..., w_n \in A$ are loc inegalitatea

$$\left| z_1 + z_2 + z_3 - \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \right| + \sum_{k=1}^{n} a_k |w_k| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

N.Bourbacut

PROBLEMA 4.a)Daca a,b,c,d sunt numere complexe de modul egal si $a + b + c + d = 0$ demonstrati ca numerele sunt afixele varfurilor unui dreptunghi.

b)Fie ABCD un patrulater inscris in cercul de raza 1.Fie G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD,CDA,DAB,ABC.Sa se arate ca daca $AG_1 + BG_2 + CG_3 + DG_4 = \frac{16}{3}$,atunci ABCD este dreptunghi.

G.M.

NOTA.Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7.