Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a X–a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia

$$|z - |z+1|| = |z + |z-1||.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$x + \log_2\left(1 + \sqrt{\frac{5^x}{3^x + 4^x}}\right) = 4 + \log_{1/2}\left(1 + \sqrt{\frac{25^x}{7^x + 24^x}}\right).$$

Problema 3. Fie numerele naturale nenule p şi n, unde $p \geq 2$, şi fie numărul real a astfel încât $1 \leq a < a + n \leq p$. Să se arate că mulţimea

$$\left\{[\log_2 x] + [\log_3 x] + \cdots + [\log_p x] \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq a + n\right\}$$

are exact $n + 1$ elemente.

Notă: $[\log_k x]$ reprezintă partea întreagă a numărului $\log_k x$.

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că

$$f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.