MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică

08.03.2014

Clasa a XI-a

1. Determinați $a,b \in \mathbb{R}$ știind că:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=0.$$

R.M.C. Nr. 1/2013-2014

2. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A = -\,{}^{t}A$, iar S_n reprezintă suma elementelor matricei $A^n, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $S_{2014} \le 0$.

Prof. Luminița Popescu, Craiova
Prof. Moanță Cristian, Craiova

3. Fie $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A, \det B \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

$$\det\left(A^2+B^2\right)+\det\left(AB+BA\right)\ge 4.$$

Prof. Dan Secleman, Craiova

4. Fie șirul $(x_n)_{n\ge1}$ dat prin condițiile $x_1 = 1$, $x_{n-1} = \frac{x_n}{1-x_n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot\ln n!\right)$.

Prof. Cristian Moanță, Craiova

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a XI-a:

1. Notând cu L limita din enunţ, avem:

$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=\infty(2-a)$. Cum $L=0$, obţinem: $a=2$.

Atunci: $L=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x+\sqrt{x^2+x+1}-x-b\right)=$

$=-b+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\right)=-b+1+\frac{1}{2}=-b+\frac{3}{2}$.

Deci: $L=0 \Leftrightarrow a=2,\ b=\frac{3}{2}$.

2. Din egalitatea $A=-\,{}^{t}A$ deducem că există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}.$$

Prin calcul se obține: $A^2=\begin{pmatrix}-a^2-b^2 & -bc & ac\\ -bc & -a^2-c^2 & -ab\\ ac & -ab & -b^2-c^2\end{pmatrix}$,

$$A^3=-(a^2+b^2+c^2)\cdot A.$$

Deci $A^{n+2}=-\alpha\cdot A^n$

sau

$A^n=\begin{cases}(-\alpha)^k\cdot A, & n=2k+1\\ (-\alpha)^{k-1}\cdot A^2, & n=2k\end{cases}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$,

unde $\alpha=(a^2+b^2+c^2)$. Din această relație obținem:

$S_{n+2}=-\alpha\cdot S_n,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$ sau $S_{2014}=(-\alpha)^{1006}\cdot S_2$. Dar

$S_2=-2\cdot(a^2+b^2+c^2+ab+bc-ac)=$

$=-[(a+b)^2+(b+c)^2+(a-c)^2]\leq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$ și

$\alpha=(a^2+b^2+c^2)\geq 0 \Longrightarrow S_{2014}\leq 0$ cu egalitate dacă și numai dacă $a=c=-b$.

3. Prin calcul direct avem că, pentru orice $X,Y\in M_2(\mathbb{R})$ există egalitatea:

$\det(X+Y)+\det(X-Y)=2(\det X+\det Y)$. Înlocuim $X=A^2+B^2$, $Y=AB+BA$ şi obţinem: $\det(A^2+B^2)+\det(AB+BA)=\dfrac{\det\left((A+B)^2\right)+\det\left((A-B)^2\right)}{2}=$

$\dfrac{\left(\det(A+B)\right)^2+\left(\det(A-B)\right)^2}{2}$ (1)

Folosind relaţia $\alpha^2+\beta^2\geq\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$, $(\forall)\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, din egalitatea (1) se obţine:

$$\det(A^2+B^2)+\det(AB+BA)\geq\frac{\left(\det(A+B)+\det(A-B)\right)^2}{4}=(\det A+\det B)^2.$$

Cum $\det A\in\mathbb{N}^*$, $\det B\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $\det A\geq 1$, $\det B\geq 1$, de unde obţinem concluzia.

4. Relația de recurență se scrie: $\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_{n-1}}+1$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$. Cum $x_1=1>0$, prin inducție concluzionăm că $x_n>0$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$. Din $\frac{1}{x_k}=\frac{1}{x_{k-1}}+1$, $(\forall)\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2$, dând valori lui k, obținem:

$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+n-1\ \Leftrightarrow\ x_n=\frac{1}{n}$. Limita din enunț se scrie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\frac{1}{n}\cdot\ln n!\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\ln n!\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{n!}\right)=$$
$$=\ln\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

Folosind criteriul raportului obținem $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}$. Concluzie:

$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\frac{1}{n}\cdot\ln n!\right)=\ln\frac{1}{e}=-1.$

Barem de corectare

Clasa a XI-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
Determinarea $a = 2$	4p
Determinarea $b = 3/2$	4p
Concluzie: a=2, b=3/2	1p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
Determinarea matricei: $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$	2p
Determinarea matricei:	1p
$A^2 = \begin{pmatrix} -a^2-b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2-c^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2-c^2 \end{pmatrix}$	1p
$A^3 = -(a^2+b^2+c^2)\cdot A$	
$A^n = \begin{cases} (-\alpha)^k \cdot A, & n = 2k+1 \\ (-\alpha)^{k-1} \cdot A^2, & n = 2k \end{cases}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,	1p
$S_{2014} = (-\alpha)^{1006} \cdot S_2$.	2p
$S_2 = -[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a-c)^2] \leq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$	1p
Finalizare	1 p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
Deducerea identității:	
$\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2(\det X + \det Y), (\forall)\ X, Y \in M_2(\mathbb{R})$	2p
$\det(A^2+B^2) + \det(AB+BA) = \dfrac{(\det(A+B))^2 + (\det(A-B))^2}{2}$	2p
$\det(A^2+B^2) + \det(AB+BA) \geq (\det A + \det B)^2$	3p
Finalizare	2p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
Rescrierea relației de recurență: $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$	1p
Demonstrarea: $x_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$	1p
$x_n = \frac{1}{n}$	2p
$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot \ln n!\right) = \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$	2p
Aplicarea criteriului raportului : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$	2p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**