Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a XI-a

Problema 1. Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^3 = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix}$ şi $tr(A) = 9$.

(S-a notat cu $tr(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

G.M. nr.12/2013

Problemă selectată de Alina Țepeş, profesor, Galați

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că $1 < \log_{n^2+3n+1}\left(n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\right) < 2$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\log_{n^2+3n+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\right\}$.

(s-a notat cu $\{a\}$ partea fracţionară a numărului real a).

Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 3. Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + n \cdot a_n}$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \cdot \left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_2} + \dfrac{3}{a_3} + ... + \dfrac{n}{a_n}\right)$.

G.M. nr. 5/2013

Problemă selecată de Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 4.

a) Dacă există $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ şi $A^k = O_2$, atunci $A^2 = O_2$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $f(x) = x^n$ să fie o funcţie surjectivă.

Constantin Ursu, profesor, Galați