Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014
CLASA a XI-a

1. a. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se arate că $B \cdot A - (B \cdot A)^{-1} = 2014 I_2$.

Prof. dr. Cătălin Pană, Râmnicu-Vâlcea

b. Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care există $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, astfel încât $A^n = O_2$.

Să se demonstreze că: $\det(I_2 + A + A^2 + ... + A^{n-1}) = 1$.

Prof. Florin Smeureanu, Râmnicu-Vâlcea
Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

2. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia $r > 0$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + n a_n}$, unde $n \geq 1$. Să se calculeze:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4}\left(\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + ... + \dfrac{b_n}{a_n}\right)$;

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n^4}\left(\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + ... + \dfrac{b_n}{a_n}\right)$.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

3. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale care verifică relaţia:

$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n + 1) \leq 0, n \geq 0$.

a. Demonstraţi că şirul este mărginit.

b. Este posibil ca şirul să nu fie covergent? Justificaţi răspunsul!

GM 57/supliment 2006

4. Determinaţi suma pătratelor elementelor matricei X^{-1} pentru

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$$

Prof. Simona Pozinărea, Râmnicu-Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean „Mathematica – modus vivendi”

Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014

BAREM CLASA a XI-a

1. a. $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -1$

$\det A \neq 0, \det B \neq 0 \Rightarrow A, B$ inversabile...1p

$(AB)^2 - Tr(AB)\cdot AB + (\det AB)\cdot I_2 = O_2$

$(AB)^2 - 2014AB - I_2 = O_2$ 1p

$A^{-1}ABAB - 2014A^{-1}AB - A^{-1} = O_2 \Rightarrow BAB - 2014B - A^{-1} = O_2 \Rightarrow$

$BABB^{-1} - 2014BB^{-1} - A^{-1}B^{-1} = O_2 \Rightarrow BA - 2014I_2 - (BA)^{-1} = O_2$ 1

b. Dacă $A = O_2$ se verifică imediat...1p

Pp. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq O_2$. Dacă $A^n = O_2 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow A^2 = (a+d)\cdot A \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2 = (a+d)^{n-1}\cdot A$, deci $a+d = 0 \Rightarrow A^2 = O_2$ 1p

$I_2 + A + A^2 + ... + A^{n-1} = I_2 + A = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ 1p

$\det(I_2 + A + A^2 + ... + A^{n-1}) = (a+1)(d+1) - bc = 1$..1p

----

Total = 7 puncte

2. $(a_n)_{n\geq 1}$ are termeni strict pozitivi şi subunitari, iar $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{1+na_n} < 1 \Rightarrow$

$(a_n)_{n\geq 1}$ convergent..1p

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Dacă $l > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1+na_n) = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1+na_n} = 0 \Rightarrow l = 0$ (F), deci

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 1p

a. Aplicăm succesiv Lema Stolz-Cesaro...1p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+...+\frac{b_n}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{(n+1)^4-n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1+nr}{n}\cdot\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{n^2}\cdot\frac{n^3}{4n^3+6n^2+4n+1} =$$

$$= \frac{r}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{n^2} = \frac{r}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}}}{(n+1)^2-n^2} = \frac{r}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{r}{8}$$ ....2p**b.** Analog

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n^4}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+...+\frac{b_n}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{b_{n+1}^{\ 4}-b_n^{\ 4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}{4b_n^{\ 3}+6b_n^{\ 2}r+4b_nr^2+r^3} =$$

$$= r \cdot \frac{1}{4r^3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{n^2} = \frac{1}{8r^2}$$ 2p

----

Total = 7 puncte

3. a. $x_{n+1}^2 + x_{n+1} \le x_n^2 + x_n \Rightarrow y_n = x_n^2 + x_n$ este descrescător……………………………1p

Cum y_n este şi mărginit inferior $\Rightarrow$ y_n convergent………………………….……….1p

De aceea, x_n mărginit (altfel y_n ar avea un subşir nemărginit)…………………..…2p

b. Un exemplu dat justifică cerinţa.

Exemplu: $x_n = \dfrac{-1+\ -1^{\ n}}{2}$ …………………………………………………………...…3p

----

Total = 7 puncte

4. Împărţim matricea X în 4 blocuri 3×3 şi avem:

Dacă X este inversabilă $\Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ astfel încât……………………….………..1p

$X \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} = I_2$ ……………………………………………….1p

$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2p

$AA' + BC' = I_3, CA' + DC' = O_3, AB' + BD' = O_3, CB' + DD' = I_3$, de unde rezultă

$B' = -A^{-1}BD', D' = \ D - CA^{-1}B\ ^{-1}, C' = -D'CA^{-1}, A' = -A^{-1}\ I_3 + BD'CA^{-1}$ 2p

$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$S^2\ X^{-1}\ = 25$ 1p

Total = 7 puncte