MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Concursul Doljean de Matematică
08.03.2014
Clasa a XII-a

1. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie "$*$" astfel:

$$x * y = xy - 2013x - 2013y + 2013 \cdot 2014,\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că $G = (2013, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$*$";

b) Demonstraţi că $(G, *)$ este grup abelian;

c) Arătaţi că grupurile $(G, *)$ şi $\left((0, \infty), \cdot\right)$ sunt izomorfe.

R.M.C. Nr. 1/2013-2014

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi $f : A \to A$, $f(x) = x^2 - x + 1$, unde 1 este elementul unitate al lui A.

a) Calculaţi $f(1-a)$, pentru $a \in A$;

b) Dacă ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţie unică, arătaţi că: $1+1+1=0$.

* * *

3. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu proprietatea că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât: $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = a$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{g(x^2)}{1+x^2}$, arătaţi că f admite primitive şi că pentru orice primitivă F a lui f avem:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = a \cdot \frac{\pi}{4} + F(0).$$

Prof. Dan Secleman, Craiova

4. Fie $a > 1$ și $f\colon \left[\frac{1}{a}, a\right] \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că:
$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = k,\ (\forall)\ x \in \left[\frac{1}{a}, a\right].$ Calculați:

a) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{(x+1)\cdot f(x)}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{(x+1)\cdot \operatorname{arctg}\, x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;

c) Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$ Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^a \sqrt[n]{tgx}\, dx$.

Prof. Cristian Moanță, Craiova

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10.
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a XII-a:

1. a) Se arată că:

$$x * y = (x-2013)(y-2013)+2013,\ (\forall)\, x, y \in G \quad (1)$$

Atunci: $(x-2013)(y-2013)+2013 > 2013$, $(\forall)\, x, y \in G = (2013, \infty)$, adică G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$*$".

b) Evident că legea "$*$" este comutativă şi se arată uşor că "$*$" este şi asociativă. Dacă $e \in G$ astfel ca $x * e = e * x = x$, $(\forall)\, x \in G$, atunci:

$(x-2013)(e-2013)+2013 = x \Leftrightarrow (x-2013)(e-2013) = x-2013$, $(\forall)\, x \in G \Leftrightarrow$ $e = 2014 \in G$. Deci $e = 2014$ este elementul neutru al lui G în raport cu legea "$*$". Fie $x \in G$ oarecare şi $x' \in G$ cu $x * x' = x' * x = e = 2014$. Atunci $(x-2013)(x'-2013)+2013 = 2014 \Leftrightarrow x' = \dfrac{1}{x-2013} + 2013 \in G$. Aşadar $(G, *)$ este grup abelian.

c) Ţinând cont de (1), definim: $f: G \to (0, \infty)$, $f(x) = x - 2013$. Cum pentru orice $y \in (0, \infty)$ ecuaţia $f(x) = y$ are soluţie unică $x = y + 2013 \in G$, rezultă că f este bijectivă. Pe de altă parte avem: $f(x * y) = (x * y) - 2013 = (x-2013)(y-2013) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in G$. Aşadar f este izomorfism.

2. a) $f(1-a) = (1-a)^2 - (1-a) + 1 = 1 - 2a + a^2 - 1 + a + 1 = a^2 - a + 1 = f(a)$;

b) Conform cu a), dacă a este soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$, atunci $1 - a = a \Leftrightarrow$ $2a = 1$. Obţinem: $4(a^2 - a + 1) = 0 \Rightarrow (2a)^2 - 2 \cdot 2a + 4 = 0 \Rightarrow 1 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow 1 + 1 + 1 = 0$.

3. Deoarece $x \to g(x^2)$ este continuă (compunerea a două funcţii continue), deducem că f este continuă, ca raport a două funcţii continue. Deci f admite primitive. Pentru orice $x > 0$, avem:

$$\int f(x)dx = \int \frac{a - g\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+x^2}dx = a \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{g\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+x^2}dx = a \cdot \operatorname{arctg} x + \int \frac{g\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' dx =$$

$a \cdot \operatorname{arctg} x + F\left(\frac{1}{x}\right) + C$. Aşadar $H(x) = a \cdot \operatorname{arctg} x + F\left(\frac{1}{x}\right)$ este primitivă a lui f, ceea ce înseamnă că există $k \in \mathbb{R}$ cu: $F(x) = a \cdot \operatorname{arctg} x + F\left(\frac{1}{x}\right) + k$, $(\forall)\, x > 0$. Înlocuind $x = 1$, rezultă: $k = -a \cdot \dfrac{\pi}{4}$ şi deci: $F(x) = a \cdot \operatorname{arctg} x + F\left(\frac{1}{x}\right) - a \cdot \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = a \cdot \frac{\pi}{2} + F(0) - a \cdot \frac{\pi}{4} = a \cdot \frac{\pi}{4} + F(0).$$

4. a) Se notează integrala cu I și cu substituția $x = \dfrac{1}{t}$ se obține:

$\mathrm{I} = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{(t+1)\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{(t+1)\cdot (k-f(t))}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \Rightarrow$

$\mathrm{I} = \frac{k}{2}\cdot\left(\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{t\cdot\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t\right) = k\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_{\frac{1}{a}}^{a}.$

$b)$Deoarece $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{(x+1)\cdot \operatorname{arctg} x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x =$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}.$

$c)$ Pentru $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x > x \Rightarrow \int_0^a \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x > \int_0^a \sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x =$

$= a^{\frac{n+1}{n}}$.

Dar pentru $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sqrt[n]{\operatorname{tg} x} = \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}\operatorname{tg} x} \le \frac{n-1+\operatorname{tg} x}{n}.$

Limita cerută este a.

Barem de corectare
Clasa a XII-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
a) $x*y=(x-2013)(y-2013)+2013$, $(\forall)x,y\in G$	1 p
G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu "$*$"	1 p
b) $(G,*)$ este grup abelian	3 p
c) $f:G\to(0,\infty)$, $f(x)=x-2013$	1 p
f este bijectivă	1p
f este morfism.	1p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
a) $f(1-a)=(1-a)^2-(1-a)+1=1-2a+a^2-1+a+1$	2 p
Finalizare	1 p
b) Obținerea relației $1-a=a$	2 p
$4(a^2-a+1)=0$	1p
$(2a)^2-2\cdot 2a+4=0$	1p
Finalizare	2p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
f admite primitive	3 p
$\int f(x)dx=\int\frac{a-g\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+x^2}dx=a\cdot\operatorname{arctg}x+F\left(\frac{1}{x}\right)+C$	3 p
Determinarea lui k: $k=-a\cdot\frac{\pi}{4}$	1p
Finalizare: $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=a\cdot\frac{\pi}{2}+F(0)-a\cdot\frac{\pi}{4}=a\cdot\frac{\pi}{4}+F(0)$.	2 p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
a) substituția $x = \frac{1}{t}$	1p
Determinare I = $k \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\Big|_{\frac{1}{a}}^{a}$	2p
b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$	1p
$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{(x+1)\cdot \operatorname{arctg}\ x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$	1p
c) $\int_0^a \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x > \int_0^a \sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x = a^{\frac{n+1}{n}}$.	2p
$(\forall)\ x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),\ \sqrt[n]{\operatorname{tg} x} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}\operatorname{tg} x} \le \frac{n-1+\operatorname{tg}\ x}{n}$.	1p
Finalizare	1p
TOTAL	**10p**