Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a XII-a

Problema 1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin

$x \circ y = 3 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + 6 \cdot y + 10.$

a) Să se determine numărul real a astfel încât legea de compoziţie "$\circ$" defineşte pe mulţimea $\mathbb{R} - \{a\}$ o structură de grup abelian.

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, unde $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{x \text{ de } n \text{ ori}},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât (m, ∞) să fie parte stabilă în raport cu legea "$\circ$".

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie şirul cu termenul general $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot \left(tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x\right) dx,\ n \geq 1.$

Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} n \cdot \left(\sqrt[n^2]{n \cdot I_n} - 1\right).$

G. M. nr. 12/2013

Problemă selectată de Vasile Dumbravă, profesor Galați

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se demonstreze că dacă

$m,\ n \in \mathbb{N}^*,\ (m, n) = 1,$ astfel încât $(xy)^m = (yx)^m, (\forall) x, y \in G$ şi $(xy)^n = (yx)^n, (\forall) x, y \in G,$ atunci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

Problemă selectată deViorica Bujor, profesor, Galați

Problema 4. Să se calculeze $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx,\ x \in [0, 2\pi].$

Problemă selectată de Alina Ciubotariu, profesor, Galați