Colegiul Naţional „Mircea cel Bătrân", Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudeţean

„Mathematica – modus vivendi"

Ediţia a XI-a, 22 februarie 2014

CLASA a XII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I i) Avem $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{b-a+a-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}$

$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{c-b+b-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a}$

$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{a-c+c-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b}$

de unde adunând membru cu membru obținem egalitatea cerută. 1p

ii) Luăm $a = \sin x$, $b = \sin(x+2)$, $c = \sin(x+4)$ și obținem

$f(x) = 2\left(\frac{1}{\sin x - \sin(x+2)} + \frac{1}{\sin(x+2) - \sin(x+4)} + \frac{1}{\sin(x+4) - \sin x}\right)$ 1p

Utilizând formula $\sin u - \sin v = 2 \cdot \sin\frac{u-v}{2} \cdot \cos\frac{u+v}{2}$ avem

$f(x) = -\frac{1}{\sin 1 \cos(x+1)} - \frac{1}{\sin 1 \cos(x+3)} + \frac{1}{\sin 2 \cos(x+2)}$. 1p

Cum $\int \frac{dx}{\cos x} = ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$ obținem 3p

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{\sin 1} ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+1}{2}\right)\right| - \frac{1}{\sin 1} ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+3}{2}\right)\right| + \frac{1}{\sin 2} ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+2}{2}\right)\right| + C$$

.... 1p

Subiectul al II-lea

Fie $x \in [2, \infty)$, $[x] = k$, $k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Longrightarrow k \leq x < k+1 \Longrightarrow k \leq x < k^2$ 1p

$log_{[x]}k \leq log_{[x]}x < log_{[x]}k^2$ 1p

$log_k k \leq log_{[x]}x < log_k k^2 \Longrightarrow 1 \leq log_{[x]}x < 2 \Longrightarrow [log_{[x]}x]=1$ 1p

$I = \int_2^{2014} \frac{1}{X(X^{2014}+1)} dx = \int_2^{2014} \frac{x^{2014}+1-x^{2014}}{X(X^{2014}+1)} dx$ 1p

$I = \int_2^{2014} \frac{1}{X} dx - \int_2^{2014} \frac{x^{2013}}{X^{2014}+1} dx$ 1p

$I = lnx|_2^{2014} - \frac{1}{2014} \int_2^{2014} \frac{2014x^{2013}}{X^{2014}+1} dx$ 1p

Finalizare: $I = lnx|_2^{2014} - \frac{1}{2014} \ln(x^{2014}+1)|_2^{2014} = \ln\frac{2014}{2} - \frac{1}{2014} \ln\frac{2014^{2014}+1}{2^{2014}+1}$ 1p

Subiectul al III-lea

Fie (G,·) un grup comutativ finit și $H = \{x \in G \mid x = x^{-1}\}$.

Dacă $x, y \in H \implies x, y \in G$ $și$ $x = x^{-1}$, $y = y^{-1} \implies$

$\implies (xy^{-1})^{-1} = (y^{-1})^{-1}x^{-1} = yx^{-1} = yx = xy = xy^{-1} \implies xy^{-1} \in H.$

Deci $H \leq G$ 2p

Din teorema lui Lagrange $ord(G) \vdots ord(H) \implies \exists n \in \mathbb{N}$ $a.î.$ $ord(G) = n \cdot ord(H)$ (1) 2p

Din ipoteză avem $ord(H) < \frac{1}{2} ord(G)$ (2) 1p

Din (1) $și$ (2) $\implies ord(H) < \frac{1}{2} n \cdot ord(H) \implies \frac{n}{2} > 1 \implies n \geq 3$ 1p

Deci $ord(H) = \frac{1}{n} ord(G) \leq \frac{1}{3} ord(G)$ 1p

Subiectul al IV-lea

Impunem condiția $p \in \mathbb{N}$.

- Dacă $p \in \{0,1\} \implies m^2+n^2 = 7 \implies m^2, n^2 \in \{0,1,4\}$, dar nici una dintre situații nu convine. 1p
- Dacă $p = 2 \implies m^2+n^2 = 8 \implies m^2, n^2 \in \{0,1,4\}$ și obținem $m^2 = n^2 = 4$
  Deci $(m, n, p) \in \{(2,2,2), (2,-2,2), (-2,2,2), (-2,-2,2)\}$. 1p
- Dacă $p = 3 \implies m^2+n^2 = 12 \implies m^2, n^2 \in \{0,1,4,9\}$, dar nici una dintre situații nu convine. 1p
- Dacă $p \geq 4 \implies 8 \mid p!$
  Obținem în inelul ($\boldsymbol{Z}_8$,+,·): $\widehat{p!} = \hat{0}$ $și$ $\widehat{m^2} + \widehat{n^2} = \hat{6}$ 2p

  Dar $\{\widehat{m^2} \mid \hat{m} \in \boldsymbol{Z}_8\} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}\} \implies \widehat{m^2} + \widehat{n^2} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}\} \implies$

  $\implies \widehat{m^2} + \widehat{n^2} \neq \hat{6}, \forall \hat{m}, \hat{n} \in \boldsymbol{Z}_8$ 1p

  Deci pentru $p \geq 4, \nexists m, n \in \boldsymbol{Z}$ a.î. $m^2+n^2 = p! + 6$. 1p