12 Iulie 2006

Problema 1. Fie ABC un triunghi şi I centrul cercului înscris în triunghi. Un punct P situat în interiorul triunghiului satisface relaţia

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Arătaţi că $AP \geq AI$, cu egalitate dacă şi numai dacă $P = I$.

Problema 2. Fie P un poligon regulat cu 2006 laturi. O diagonală a sa se numeşte *bună* dacă extremităţile ei divid perimetrul poligonului P în două părţi, fiecare având un număr impar de laturi. Laturile poligonului P sunt şi ele considerate ca fiind *bune*.

Presupunem că poligonul P a fost partiţionat în triunghiuri prin 2003 diagonale, astfel încât oricare două dintre aceste diagonale nu se intersectează în interiorul poligonului P. Determinaţi valoarea maximă a numărului de triunghiuri isoscele cu două laturi *bune* care pot apărea într-o astfel de partiţie a poligonului P.

Problema 3. Determinaţi cel mai mic număr real M pentru care inegalitatea

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

este adevărată oricare ar fi numerele reale a, b şi c.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

13 Iulie 2006

Problema 4. Determinaţi toate perechile (x, y) de numere întregi astfel încât

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Fie $P(x)$ un polinom de grad $n > 1$ cu coeficienţi numere întregi şi fie k un număr natural nenul. Considerăm polinomul $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, unde P apare de k ori. Demonstraţi că există cel mult n numere întregi t astfel încât $Q(t) = t$.

Problema 6. Fie P un poligon convex. Asociem fiecărei laturi b a lui P aria maximă a unui triunghi conţinut în P şi în care una dintre laturi este b. Arătaţi că suma ariilor asociate laturilor poligonului P este cel puţin egală cu dublul ariei poligonului P.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte