Language: **Romanian**

Day: **1**

Miercuri, 7 iulie, 2010

Problema 1. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ ($\lfloor z\rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real z).

Problema 2. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi fie Γ cercul său circumscris. Dreapta AI taie a doua oară Γ în D. Fie E un punct pe arcul BDC şi F un punct pe latura BC astfel încât

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Notăm cu G mijlocul segmentului IF. Demonstraţi că dreptele DG şi EI se intersectează pe Γ.

Problema 3. Determinaţi toate funcţiile $g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care numărul

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$$

este pătrat perfect oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Joi, 8 iulie, 2010

Problema 4. Fie P un punct interior triunghiului ABC. Dreptele AP, BP şi CP taie a doua oară cercul Γ, circumscris triunghiului ABC, în punctele K, L şi respectiv M. Tangenta la Γ în C intersectează dreapta AB în S. Presupunem că $SC = SP$. Arătaţi că $MK = ML$.

Problema 5. În fiecare dintre cutiile $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ se află iniţial câte o monedă. Sunt permise următoarele operaţii:

Tipul 1: Alegând o cutie nevidă B_j cu $1 \leq j \leq 5$, eliminăm o monedă din B_j şi adăugăm două monede în B_{j+1}.

Tipul 2: Alegând o cutie nevidă B_k cu $1 \leq k \leq 4$, eliminăm o monedă din B_k şi schimbăm între ele conţinuturile (posibil vide) cutiilor B_{k+1} şi B_{k+2}.

Determinaţi dacă există un şir finit de operaţii de tipurile de mai sus, astfel încât cutiile B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 să devină goale iar cutia B_6 să conţină exact $2010^{2010^{2010}}$ de monede.

Problema 6. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât pentru un număr natural nenul s, dat, să avem

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

pentru orice $n > s$. Demonstraţi că există numere naturale nenule ℓ şi N, $\ell \leq s$, astfel încât $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ pentru orice $n \geq N$.