Luni, 18 iulie, 2011

Problema 1. Pentru orice mulţime formată din patru numere naturale nenule distincte $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ notăm cu s_A suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Fie n_A numărul de perechi (i, j) cu $1 \leq i < j \leq 4$, pentru care $a_i + a_j$ divide s_A. Determinaţi mulţimile A pentru care n_A ia valoarea maximă.

Problema 2. Fie $\mathcal{S}$ o mulţime finită de puncte din plan ce conţine cel puţin două puncte, astfel încât oricare trei puncte nu sunt coliniare. Prin *moară de vânt* definim următorul proces. Considerăm o dreaptă ℓ ce trece printr-un singur punct $P \in \mathcal{S}$. Dreapta ℓ se roteşte în sensul acelor de ceasornic în jurul punctului *pivot* P până întâlneşte pentru prima dată un alt punct Q aparţinînd mulţimii $\mathcal{S}$. Punctul Q devine noul pivot în jurul căruia dreapta ℓ continuă să se rotească în sens orar, până va întâlni din nou pentru prima dată un punct din mulţimea $\mathcal{S}$. Procesul continuă indefinit, pivotul fiind de fiecare dată un punct din $\mathcal{S}$.
Demonstraţi că există un punct $P \in \mathcal{S}$ şi o dreaptă iniţială ℓ ce conţine P, astfel încât moara de vânt să treacă de o infinitate de ori prin fiecare punct din $\mathcal{S}$.

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

pentru orice numere reale x şi y. Demonstraţi că $f(x) = 0$ pentru orice număr $x \leq 0$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Marţi, 19 iulie, 2011

Problema 4. Fie n un număr natural strict pozitiv. Considerăm o balanţă cu două talere şi n greutăţi având valorile 2^0, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$, respectiv. Cele n greutăţi sunt puse pe rând pe unul dintre talerele balanţei, într-o secvenţă de n mutări. Prima mutare constă în alegerea unei greutăţi şi plasarea ei pe talerul stâng. Fiecare dintre următoarele mutări constă în plasarea uneia dintre greutăţile rămase pe unul dintre talere în aşa fel încât în fiecare moment talerul din dreapta nu este mai greu decât talerul din stânga. Determinaţi numărul de astfel de secvenţe de n mutări.

Problema 5. Considerăm o funcţie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice întregi m şi n, diferenţa $f(m) - f(n)$ se divide prin $f(m-n)$. Demonstraţi că, pentru orice întregi m, n pentru care $f(m) \leq f(n)$, numărul $f(n)$ se divide prin $f(m)$.

Problema 6. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi Γ cercul său circumscris. Considerăm o dreaptă ℓ tangentă la Γ. Fie ℓ_a, ℓ_b, respectiv ℓ_c simetricele lui ℓ faţă de dreptele BC, CA, respectiv AB. Arătaţi că cercul circumscris triunghiului determinat de dreptele ℓ_a, ℓ_b, şi ℓ_c este tangent cercului Γ.