CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
" PETRU MOROŞAN -TRIDENT "
Ediţia a XI-a , Secţiunea A (M_1),
Brăila, 8-9.11.2013

CLASA a XI a

1. Demonstraţi că dacă $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ cu $A \neq O_2$ şi $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $AB - rBA = A$ atunci $A^2 = O_2$.

Gheorghe Alexe

2. Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ cu proprietăţile :

$$\text{şi } a_0 = \sqrt{3}, b_0 = 2\sqrt{3}, a_{n+1} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}\ ,\ b_{n+1} = \frac{2b_n}{2+\sqrt{4+b_n^2}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n b_n$.

***

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$ Arătaţi că

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n}{x_1 x_2 \ldots x_n} + \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \geq n + \frac{1}{n}, \text{ oricare ar fi } x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, \infty)$$

şi precizaţi în ce caz avem egalitate.

Dan Negulescu, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.