CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A IX-A

Programa TC+CD (3 ore/săpt)

1.) Se consideră funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)= ax+b$, $g(x)= bx+a$, cu $a,b\in\mathbb{N}$, $a>b\geq 1$. În sistemul de coordonate *xOy* fie punctul *A* intersecţia graficelor funcţiilor. Dacă graficul funcţiei f taie axa *Oy* în punctul *B*, iar graficul funcţiei *g* în punctul *C,* să se arate că triunghiul *ABC* nu este dreptunghic şi să se calculeze aria triunghiului.

2.) Dacă $x, y, z\in(0,+\infty)$şi $x+y+z=2014$, demonstraţi că:

a.) $\dfrac{x}{\sqrt{(x+2y)(x+2z)}}+\dfrac{y}{\sqrt{(y+2x)(y+2z)}}+\dfrac{z}{\sqrt{(z+2x)(z+2y)}}\geq 1$

b.) $\sqrt{xy+xz}+\sqrt{xy+yz}+\sqrt{xz+yz}\leq 3021$

3.) 5 muncitori trebuie să împartă 120 kg de cereale astfel încât, al doilea muncitor să primească cu atât mai mult ca primul, cu cât primeşte mai mult al treilea decât al doilea, al patrulea decât al treilea şi al cincilea decât al patrulea. Se ştie că, primul şi al doilea muncitor împreună primesc de 7 ori mai puţin decât ceilalţi trei împreună. Ce cantitate primeşte fiecare muncitor în parte?

4.) Fie *M* un punct oarecare în interiorul paralelogramului *ABCD* , $\{E\}=AM\cap CD$, $\{F\}=BM\cap CD$, *N* şi *P* mijloacele segmentelor $[AB]$ respectiv $[EF]$. Demonstraţi cu ajutorul vectorilor că punctele *M, N* şi *P* sunt coliniare.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A IX-A

Programa TC +CD(3 ore/săpt)

1.	**Din oficiu**	**1p**
	Coordonatele punctelor sunt: $A(1,a+b)$, $B(0,b)$, $C(0,a)$	**3p**
	Lungimile laturilor sunt: $AB=\sqrt{1+a^2}$, $AC=\sqrt{1+b^2}$, $BC=a-b$	**3p**
	Avem relaţiile: *AB>AC* şi *AB>BC*	**1p**
	Presupunând că triunghiul este dreptunghic, ajungem la *a*=*b*, fals	**1p**
	Aria triunghiului este (a-b)/2	**1p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$\sqrt{(x+2y)(x+2z)}\le x+y+z, \sqrt{(y+2x)(y+2z)}\le x+y+z, \sqrt{(z+2x)(z+2y)}\le x+y+z$	**2p**
	$\frac{x}{\sqrt{(x+2y)(x+2z)}}+\frac{y}{\sqrt{(y+2x)(y+2z)}}+\frac{z}{\sqrt{(z+2x)(z+2y)}}\ge\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1$	**2p**
b.)	$\sqrt{xy+xz}=\sqrt{x(y+z)}\le\frac{x+y+z}{2}=1007$, analog avem $\sqrt{xy+yz}\le1007$ și $\sqrt{xz+yz}\le1007$	**4p**
	$\sqrt{xy+xz}+\sqrt{xy+yz}+\sqrt{xz+yz}\le3021$	**1p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	Al treilea muncitor primeste *x* kg	**1p**
	Cantitatile primite vor fi: $x-2r, x-r, x, x+r, x+2r$	**2p**
	Scrierea sistemului $\begin{cases} 5\cdot x=120 \\ 7\cdot(2x-3r)=3x+3r \end{cases}$	**3p**
	Soluția sistemului $x=24, r=11$	**2p**
	Finalizarea: cantitățile sunt $2, 13, 24, 35, 46$	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	$\overline{MN}=\frac{1}{2}\left(\overline{MA}+\overline{MB}\right), \overline{MP}=\frac{1}{2}\left(\overline{ME}+\overline{MF}\right)$	**2p**
	$MAB_\Delta \sim MEF_\Delta \Rightarrow \frac{ME}{MA}=\frac{MF}{MB}=k\in\Re_+^*$	**2p**
	$\overline{ME}=k\cdot\overline{AM}, \overline{MF}=k\cdot\overline{BM}$	**2p**
	$\overline{MP}=k\cdot\overline{NM}\Rightarrow M, N$ şi P sunt puncte coliniare.	**3p**