

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A X-A

Programa TC+CD (3 ore/săpt)

- 1.) Fie $E(x) = \frac{2}{4^x + 2}$, $x \in \mathcal{Q}$.
- Calculați valorile lui $E(-1)$, $E\left(-\frac{1}{2}\right)$ și $E(1,5)$.
 - Arătați că $E(1-x) + E(x) = 1$, oricare ar fi $x \in \mathcal{Q}$.
 - Calculați suma $E(-99) + E(-98) + \dots + E(100)$.
- 2.) Arătați că, dacă $\log_{12} 18 = a$ și $\log_{24} 54 = b$, atunci $ab + 5(a - b) = 1$.
- 3.) Pentru fiecare $n \in \mathcal{N}$, $n \geq 3$ se consideră expresia: $E_n(x) = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{x}}}}}}_{n \text{ radicali}}$
- Calculați valoarea lui $E_5(9)$.
 - Calculați valoarea lui $E_{2014}(9)$.
 - Rezolvați în \mathcal{R} ecuația $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{x}}}}} = 3$.
- 4.) Valoarea inițială a unui automobil este de 12000 €. Valoarea automobilului scade anual cu 10%. Dacă V_n este valoarea automobilului după n ani, atunci:
- Determinați o relație de recurență pentru V_n .
 - Calculați valorile lui V_1 , V_2 , V_3 .
 - Calculați valoarea automobilului după 6 ani.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A X-A

Programa TC +CD(3 ore/săpt)

1.	Din oficiu	1p
a.)	$E(-1) = \frac{2}{\frac{1}{4} + 2} = \frac{8}{9}, \quad E\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{4}{5}, \quad E(1,5) = \frac{2}{8 + 2} = \frac{1}{5}$	3p
b.)	$E(1-x) + E(x) = \frac{2}{4^{1-x} + 2} + \frac{2}{4^x + 2} = \frac{2}{\frac{4}{4^x} + 2} + \frac{2}{4^x + 2} = \frac{2 \cdot 4^x}{4 + 2 \cdot 4^x} + \frac{2}{4^x + 2} = \frac{4^x}{2 + 4^x} + \frac{2}{4^x + 2} = \frac{4^x + 2}{4^x + 2} = 1$	3p
c.)	Remarcăm că suma are 200 de termeni.	1p
	În baza celor stabilite la b), deducem că: $E(-99) + E(100) = 1, E(-98) + E(90) = 1, \dots, E(-1) + E(0) = 1.$	1p
	Adunând cele o sută de egalități, obținem $S = 100.$	1p
2.	Din oficiu	1p
	$a = \log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$	3p
	$b = \log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{1 + 3\log_2 3}{3 + \log_2 3}$	3p
	Notând $\log_2 3 = k$, deducem că $ab + 5(a - b) = \frac{1 + 2k}{2 + k} \cdot \frac{1 + 3k}{3 + k} + 5\left(\frac{1 + 2k}{2 + k} - \frac{1 + 3k}{3 + k}\right) = \frac{k^2 + 5k + 6}{k^2 + 5k + 6} = 1.$	3p
3.	Din oficiu	1p
a.)	$E_5(9) = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}} = \dots = 3$	2p
b.)	$E_n(9) = 3$ conform metodei inducției matematice $\Rightarrow E_{2014}(9) = 3$	3p
c.)	Prin ridicări la pătrat succesive: $\sqrt{x} = 3.$	3p
	Finalizare $x = 9.$	1p
4.	Din oficiu	1p
a.)	$V_n = \frac{9}{10} V_{n-1}$	2p
b.)	$V_1 = 10800, V_2 = 9720, V_3 = 8748$	3p
c.)	$V_n = V_0 \cdot (1 - p)^n$	1p
	$V_6 = 12000 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)^6 = 6377,29 \text{ €}.$	3p