CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A X-A

Programa TC+CD (4 ore)

1.) **a.)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia exponenţială $2^{(x-1)(x-2)}+2^{3x-x^2}=5$.

b.) În triunghiul *ABC* dreptunghic în *A* lungimile catetelor *b* şi *c* satisfac egalitatea

$2\lg\frac{b+c}{\sqrt{6}}=\lg b+\lg c$. Calculaţi măsura unghiului C.

2.) Să se determine funcţiile surjective $f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1};\ a,b\in\mathbb{R}$.

3.) **a.)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^8-77z^4-324=0$.

b.) Reprezentaţi grafic în planul complex punctele corespunzătoare soluţiilor ecuaţiei.

c.) Uniţi cu segmente în jurul originii punctele corespunzătoare soluțiilor ecuației şi calculaţi perimetrul şi aria „steluţei” obţinute.

4.) Se dau mulţimile $A=\left\{z\in C\,\middle|\,\left|z-1-\sqrt{3}\right|\le 2\right\}$ şi $B=\left\{z\in C\,\middle|\,|z|\le\sqrt{2}\right\}$. Fie M_A respectiv M_B mulţimea punctelor din planul complex ale căror afixuri sunt elementele mulţimilor *A* respectiv *B*. Calculaţi aria suprafeţei plane $S=M_A\cap M_B$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

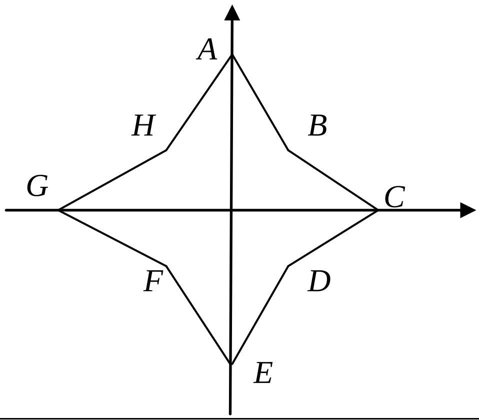
CLASA A X-A

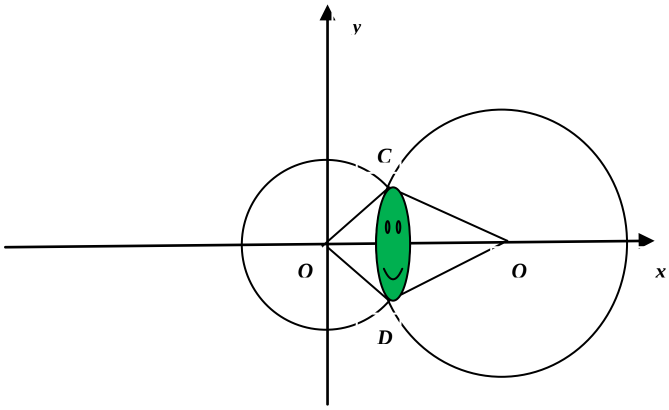
Programa TC+CD (4 ore/săpt)

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$2^{(x-1)(x-2)}+2^{3x-x^2}=5 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2}+\dfrac{4}{2^{x^2-3x+2}}=5$	**1p**
	Cu substituţia $t=2^{x^2-3x+2}$ obţinem ecuaţia $t^2-5t+4=0$ cu rădăcinile 1 şi 4.	**1p**
	Ecuaţia $2^{x^2-3x+2}=1$ are soluţiile 1 şi 2. Ecuaţia $2^{x^2-3x+2}=4$ are soluţiile 0 şi 3. Mulţimea soluţiilor $S=\{0,1,2,3\}$.	**2p**
b.)	$2\lg\dfrac{b+c}{\sqrt{6}}=\lg b+\lg c \Leftrightarrow \lg\left(\dfrac{b+c}{\sqrt{6}}\right)^2=\lg bc$	**1p**
	$\Leftrightarrow \dfrac{b^2+2bc+c^2}{6}=bc \Leftrightarrow \dfrac{2bc}{a^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\Leftrightarrow 2\sin C\cos C=\dfrac{1}{2}$	**1p**
	$\Leftrightarrow \sin 2C=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2C=\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow C=\dfrac{\pi}{12}$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	f este surjectivă dacă $Imf=[-1,1]$	**1p**
	$Imf=\{y\in\mathbb{R} \mid \exists x\in\mathbb{R},\ f(x)=y\}$	**1p**
	Rezultă $\operatorname{Im} f=\left[\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{2},\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right]$.	**4p**
	Din sistemul $\dfrac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=-1$ şi $\dfrac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}=1$ se obţin soluţiile $a=2,\ b=0$ respectiv $a=-2,\ b=0$	**2p**
	Funcţiile căutate sunt: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ şi $f(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}$.	**1p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Cu substituţia $z^4=t$ obţinem o ecuaţie de gradul doi cu rădăcinile 81 şi –4.	**1p**
	Rezolvând ecuaţiile binome $z^4=81$ şi $z^4=-4$ obținem mulţimea soluţiilor $S=\{3,\ 3i,\ -3,\ -3i,\ 1+i,\ 1-i,\ -1+i,\ -1-i\}$.	**3p**

b.)		**2p**
c.)	Perimetrul "steluţei" *ABCDEFGH* este alcătuit din 8 segmente congruente de lungime $\sqrt{5}$, deci perimetrul este $P=8\sqrt{5}$.	**1p**
	Aria poate fi calculată ca suma ariei pătratului *BDFH* şi ariilor a patru triunghiuri echilaterale congruente $A=2^2+4\cdot\frac{2\cdot 2}{2}=12$.	**2p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
		**2p**
	Suprafaţa *S* este „smile"-ul haşurat delimitat de câte un arc ale cercurilor $C(O,\sqrt{2})$ şi $C(Q,2)$.	**1p**
	$A_S=A_{\text{sector}COD}+A_{\text{sector}CQD}-A_{\Delta COD}-A_{\Delta CQD}$	**1p**
	$OC=\sqrt{2}$, $CQ=2$, $OQ=1+\sqrt{3}\Rightarrow \text{m}(\angle COQ)=45^\circ$, $\text{m}(\angle CQO)=30^\circ$ şi $z_C=1+i$	**2p**
	$A_{\text{sector}COD}=\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$, $A_{\text{sector}CQD}=\frac{1}{6}\pi\cdot 2^2=\frac{2\pi}{3}$	**1p**
	$A_{\Delta COD}+A_{\Delta CQD}=2\cdot\frac{OQ\cdot\frac{CD}{2}}{2}=1+\sqrt{3}$	**1p**
	$A_S=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}-1-\sqrt{3}=\frac{7\pi}{6}-1-\sqrt{3}$	**1p**