

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A XI-A

Programa M2

- 1.) Să se calculeze următoarele limite de funcții:

a.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \operatorname{tg} x} - 1}{e^{x \sin x} - 1}$

b.) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}; a > 0, b > 0.$

- 2.) Să se determine matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ pentru care avem $X^2 - 4X + 13I_2 = O_2$, unde

$$x, y \in \mathbb{R}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3.) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

a.) Să se studieze existența limitei funcției f în punctul $x_0 = 1$.

b.) Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c.) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + \dots + f(e^{x^{2014}})}{x^{2014}}$.

- 4.) Un teatru cu capacitatea de 300 de locuri și-a vândut la un spectacol toate biletele. Un bilet pentru copii costă 2 €, pentru studenți 3 €, iar pentru adulți 4 €. Se știe că numărul adulților a fost jumătatea din numărul total al copiilor și studenților, iar la aceea reprezentație s-a încasat suma de 900 €. Determinați numărul spectatorilor din fiecare categorie de vârstă.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A XI-A

Programa M2

1.	Din oficiu	1p
a.)	Observarea nederminării $\frac{0}{0}$ și înmulțirea cu conjugatul.	2p
	Aplicarea limitei fundamentale: $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1.$	1p
	Simplificarea: $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$	1p
	Finalizarea și obținerea limitei egale cu $\frac{1}{2}$.	1p
b.)	Observarea nederminării 1^∞ .	1p
	Aplicarea limitei fundamentale: $\lim_{u(x) \rightarrow 0} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$	1p
	Aplicarea limitei fundamentale: $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a.$	1p
	Finalizarea și obținerea limitei egale cu \sqrt{ab} .	1p

2.	Din oficiu	1p
	Calcularea lui X^2 .	2p
	Înlocuirea corectă a lui X în ecuație.	2p
	Găsirea sistemului de ecuații: $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 13 = 0 \\ 2xy - 4y = 0 \end{cases}$.	2p
	Rezolvarea corectă a sistemului și finalizare: excluderea cazului $y = 0$, obținerea soluției: $(2,3)$ și $(2,-3)$ adică $X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.	3p

3.	Din oficiu	1p
	$l_s(1) = 5$ și $l_d(1) = 0$ din care rezultă că f nu are limită în punctul $x_0 = 1$.	2p
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x} = 2$	3p
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+x^2+\dots+x^{2014}}{x^{2014}} = 1$	4p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA

4.	Din oficiu	1p
	Scrierea sistemului de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 300 \\ 2x + 3y + 4z = 900 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$	2p
	Rezolvarea sistemului.	4p
	$x = 100, y = 100, z = 100$	2p
	Finalizare, verificare.	1p