CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

CLASA A XII-A

Programa M2

1.) Să se calculeze :

a.) $\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

b.) $\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)} dx, \quad x \in (-2,2)$

2.) În mulţimea R definim legea de compoziţie $x * y = x + y - 6, \forall x, y \in R$.

a.) Să se demonstreze că $e = 6$ este elementul neutru al legii de compoziţie „*” pe mulţimea R.

b.) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $(x^2 + 3x - 1) * (2x^2 - x + 6) \geq 0$.

c.) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} * \frac{1}{2^2} * .... * \frac{1}{2^7} < 0$.

3.) Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât funcţia

$G : (-\infty, 4) \to R, G(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{4-x}$ să fie o primitivă a funcţiei

$g : (-\infty, 4) \to R, g(x) = \frac{1}{2}(5x+4)\sqrt{4-x}$.

4.) Se consideră 99 de bile, dintre care 50 numerotate de la 1 la 50, iar restul bilelor nenumerotate. Bilele numerotate se introduc într-o urnă, restul fiind de rezervă. Din urnă se extrag două bile şi în locul lor se introduce o bilă pe care se trece numărul obţinut ca modulul diferenţei între produsul şi suma numerelor extrase. Procedeul se repetă de 49 de ori. Care este ultimul număr rămas în urnă ?

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A XII-A

Programa M2

1.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x$	**2p**
	$\int \frac{1}{\sin^2 2x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \frac{1}{4}(\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x) + C$	**3p**
b.)	$x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4 + x^2 + 4\right)$	**1p**
	$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^2-4}\right)dx = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\ln\frac{2-x}{2+x} + C$	**3p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Definiţia elementului neutru.	**1p**
	Verificarea pentru $e = 6$.	**2p**
b.)	Înlocuirea şi rezolvarea inecuaţiei: $3x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$	**3p**
c.)	Calculând suma progresiei geometrice obţinem: $1 - \frac{1}{2^7} - 6 \cdot 6 < 0$	**2p**
	Finalizare $-\left(\frac{1}{2^7} + 35\right) < 0$.	**1p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	G este primitiva lui g dacă şi numai dacă $G' = g$	
	$G` = (2ax + b)\sqrt{4-x} + \left(ax^2 + bx + c\right)\frac{(-1)}{2\sqrt{4-x}}$	**3p**
	Din egalitatea $G` = g$ rezultă că $-5ax^2 + (16a - 3b)x + 8b - c = 16 + 16x - 5x^2$	**3p**
	De unde rezultă că $a = 1$, $b = 0$, $c = -16$	**3p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	Dacă x şi y sunt numerele scrise pe bile la o extragere, pe noua bilă întrodusă în urnă se trece numărul $\lvert xy - x - y\rvert$.	**2p**
	Dacă $x = 1$ sau $y = 1$, numărul pe noua bilă este 1, adică 1 se întoarce în urnă.	**3p**
	Dacă $x \neq 1$ şi $y \neq 1$, numărul 1 a rămas în urnă.	**3p**
	În concluzie 1 este în urnă după terminarea fiecărei operaţii, prin urmare ultima bilă rămasă în urnă conţine numărul 1.	**1p**