Ministerul Educaţiei Naţionale — Inspectoratul Şcolar al Judeţului Timiş

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A IX-A
Filiera teoretică-Profil real- Specializarea Științe ale naturii

SUBIECTUL I

1.Fie numerele $a=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+...+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ și $b(n)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

a)Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $p:"a\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}"$. Justificați.

b)Determinați mulțimea de adevăr a predicatului $"b(n)<0,91 \quad , n\in\mathbf{N}^*"$.

2. Se ştie că orice bacil este un microb, iar unii bacili sunt patogeni. Stabiliţi care din următoarele propoziţii sunt adevărate: p_1 : Toţi microbii sunt patogeni; p_2 : Niciun microb nu este patogen; p_3 : Unii bacili patogeni nu sunt microbi; p_4 : Unii microbi sunt patogeni.

SUBIECTUL II

Se înscrie într-un pătrat P_1 cu latura 2^{10} cm, un cerc C_1, apoi în cercul C_1 se înscrie un pătrat P_2 în care se înscrie un cerc C_2 și procedeul continuă.

a)Demonstrați că lungimile laturilor pătratelor P_1, P_2, P_3 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Calculați suma ariilor primelor 11 pătrate.

c) Se poate obține prin acest procedeu un cerc cu aria egală cu $2^{10}\pi$? ($A_{cerc}=\pi r^2$). Justificați.

SUBIECTUL III

Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $2a_{n+2}=5a_{n+1}-3a_n$, $\forall n\geq 1$, $a_1=1$, $a_2=\frac{5}{2}$ şi $b_n=a_{n+1}-a_n$, $\forall n\geq 1$.

a) Demonstraţi $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică cu raţia $\frac{3}{2}$.

b) Determinaţi formulele termenilor generali ai şirurilor $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$.

SUBIECTUL IV

Fie $ABCD$ un trapez , $AB\parallel CD$, $AB=a$, $CD=b$, $a>b$, O punctul de intersecție al diagonalelor și P punctul de intersecție al laturilor neparalele.

a)Demonstrați că $\frac{PD}{PA}=\frac{DO}{OB}=\frac{b}{a}$.

b)Arătați că $\overrightarrow{PO}=\frac{b}{b+a}\overrightarrow{PA}+\frac{b}{b+a}\overrightarrow{PB}$.

c)Demonstrați că punctele P,O,M sunt coliniare, unde M este mijlocul segmentului $[AB]$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv trei ore.*
- *Pentru fiecare problemă rezolvată se acordă 7 puncte (0 puncte din oficiu)*

Vă dorim succes !

prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar de specialitate - I.S.J. Timiş

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*
etapa locală – 21 februarie 2014
CLASA A IX-A
Filiera teoretică-Profil real- Specializarea Științe ale naturii
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

1. a) $a=1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-...+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{9}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ **1p**

$a\in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ - (F) **1p**

b) $b(n)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$ **1p**

$\Rightarrow \frac{n}{n+1}<0,91\Rightarrow n\in\{1,2,3,...,10\}$ **2p**

2. $p_1:F,\ p_2:F,\ p_3:F,\ p_4:\mathrm{A}$ **2p**

SUBIECTUL II

Notăm cu l_k latura pătratului P_k, iar cu R_k raza cercului C_k.

a) $R_1=\frac{l_1}{2}=2^9,\ l_2=R_1\sqrt{2}=2^9\sqrt{2}$ **1p**

$R_2=\frac{l_2}{2}=2^8\sqrt{2}\ ,\ l_3=R_2\sqrt{2}=2^9$

$\Rightarrow l_2^2=l_1l_3\Rightarrow l_1,l_2,l_3$ termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu $r=\frac{l_2}{l_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **1p**

b) $l_k=l_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2^{k-1}}}=\sqrt{2^{21-k}}\Rightarrow A_k=l_k^2=2^{21-k}$ **1p**

$\left(A_k\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ progresie geometrică cu $A_1=2^{20},r=2^{-1}$ **1p**

$S_{11}=\frac{2^{20}(2^{-11}-1)}{2^{-1}-1}=2^{21}(1-2^{-11})$ **1p**

c) $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ progresie geometrică cu $R_1=2^9,r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **1p**

$R_k=\sqrt{2^{19-k}}\Rightarrow A_{cerc}=\pi\cdot 2^{19-k}=2^{10}\pi\Rightarrow k=9$ deci se poate obține un cerc, al nouălea, prin acest procedeu **1p**

SUBIECTUL III

a) $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{\frac{5a_{n+1}-3a_n}{2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{3}{2}$ **2p**

b) $b_1=a_2-a_1=\frac{3}{2}\Rightarrow b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$ **2p**

$$\left.\begin{array}{l} b_1=a_2-a_1\\ b_2=a_3-a_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ b_{n-1}=a_n-a_{n-1}\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} S_{n-1}=a_n-a_1\Rightarrow a_n=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2$$ **3p**

SUBIECTUL IV

a)

$$\left.\begin{array}{r} DC \parallel AB \Rightarrow \Delta PDC \sim \Delta PAB \Rightarrow \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{b}{a} \\ \Rightarrow \Delta DCO \sim \Delta BAO \Rightarrow \dfrac{DO}{OB} = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{PD}{PA} = \frac{DO}{OB} = \frac{b}{a}$$

2p

b) $\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \overrightarrow{PO} = \dfrac{a}{b+a}\overrightarrow{PD} + \dfrac{b}{b+a}\overrightarrow{PB}$ **1p**

Dar $\overrightarrow{PD} = \dfrac{b}{a}\overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{PO} = \dfrac{b}{b+a}\overrightarrow{PA} + \dfrac{b}{b+a}\overrightarrow{PB}$ **1p**

c) $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) =$ **1p**

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a+b}{b} \cdot \dfrac{b}{b+a}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) = \dfrac{a+b}{2b}\overrightarrow{PO}$

1p

Cum $\dfrac{a+b}{2b} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PO}$ coliniari $\Rightarrow P, O, M$ puncte coliniare **1p**